

*W. P. +
H. H. H. H. H.*

**EUCLIDIS
ELEMENTA**

**GEOMETRIÆ
PLANÆ AC SOLIDÆ.**

Quibus accedunt selecta

**EX ARCHIMEDE
THEOREMATA.**



Euclid
V. CL. ANDREÆ
TACQUET

SOC. JESU Sacerdotis &
Matheseos Professoris

ELEMENTA EUCLIDEA
GEOMETRIÆ

PLANÆ AC SOLIDÆ;

ET SELECTA

EX ARCHIMEDE
THEOREMATA

Editionem primam CANTAB. adornavit, plurimisque
Corollariis, varios propositionum *Usus* exhibentibus
illustravit, & Schemata XL addidit Vir Clariss.

GULIELMUS WHISTON, A. M.

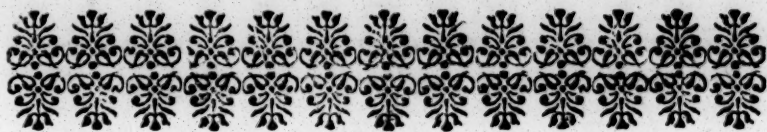
Nuperus Matheseos Professor LUCASIANUS.

EDITIO TERTIA, prioribus multo auctior:
Cui accedunt complura nova Schemata æri incisa.

CANTABRIGIÆ,

Impensis CORN. CROWNFIELD, Celeberrimæ Academix Typo-
graphi; & JACOBI KNAPTON, Bibliopolæ Londinensis, ad In-
signe *Coronæ* in Cœmeterio D. Pauli. MDCCXXII.





PRÆFATIO.

CUM apud nos decretum esset *Elementa Geometriae Euclidea juxta V. Cl. Andreae Tacquet editionem recudere, dedi operam ut quam emendatissime, nec sine auctariis e novo nostro Typographeo prodirent. Atque equidem Editio hæc Tacquetiana, quam haud immerito elegantissimam vocat nostra professionis Pater Cl. Barrovius, præ aliis mihi semper visa est, & explicandi facilitate, & demonstrandi perspicuitate reliquis palmam præripuisse. Neque aliam fuisse Doctiorum de eadem sententiam, Publicus Geometrarum usus suadere videtur. Vix aliam enim Elementorum Euclideanum formam sæpius impressam, aut manibus frequentius tritam videre licet. Quin & illa quoque ad accurandam hanc præ reliquis editionem, quam integram hic damus, animos addiderunt, quod & præcipua Archimedis, Geometrae plane summi, de Sphæra, Cono, atque Cylindro Theoremata, auro contra non cara ad calcem exhiberet; & in reliquis Editoris nostri operibus Mathematicis, eruditissimis sane, & ad usum Tyronum scientias hæc proprio Marte aggredientium optime accommodatis, passim citata extaret. Desuerunt quidem, aut mihi saltem defuisse visa sunt etiam in optimis hisce elementis nonnulla, quæ si haberentur, discipulis essent haud parum emolumenti allatura. Nempe in secundo libro methodum demonstrandi incipientibus paulo difficiliorem; In quinto proportionum*

doctrinam

* 2.

P R Æ F A T I O.

doctrinam in se facillimam per ambages nimias expositam; Atque etiam ob corollariorum practicorum defectum, Elementa nimis abstracta, gracilia, & tadii plena causabar. Quocirca omnia ad incudem revocare, & quae desiderari posse videbantur supplere, in animum induxi. Secundi itaque libri demonstrationes plerasque tum rectangulorum constructione, tum exemplis numericis illustravi: Doctrinam de proportionem, quam quintus liber complectitur, summam & brevissime exposui: Et quod in nostro opere, & in universo hoc studiorum genere palmarium reor, Varios propositionum Usus sive theoreticos, sive practicos, (faciliores nimirum, & quales discentium captui essent accommodi) condimenti instar, atque incitamenti haud raro apposui. Quae cum ita sint, fas sit sperare Elementa Geometrica jam tandem, etiam ordine Euclideo non mutato, & facilitate, & usu ita fore comparata, ut Elementis aliis novo ordine atque methodo demonstrandis non sit opus futurum. Minime enim placet eorum ratio, qui prima Geometria elementa alibi quam apud Euclidem, quem solum tanquam unicum Elementorum Conditiorem citant ubique Mathematicorum libri, & bis mille annorum usus satis commendat, quaesitum eunt. Hisce quidem perlectis, atque in succum & sanguinem versis, pergant ulterius Tyrones quoquo patet Matheseos Campus, quaqua ducit Neotericorum solertia, in plerisque sane longe felicissima: sed Duce, atque Auspice Euclide pergant. Juvat antiquos exquirere fontes: & ingens erit mora, operaque pretium calculo analytico, indivisibilium methodo, Infinitorum Arithmetica, & novissima fluxionum doctrina Constructionem Veterum Geometrarum Syntheticam, tanquam Scientiarum Mathematicarum basin inconcussam, praestravisse & pralibasse.

Sciat autem Lector, me Corollaria ista, quibus Usus propositionum continentur, e celeberrimis Elementorum scriptoribus;

P R Æ F A T I O.

scriptoribus; De Chales, Barrovio, Pardies, Sturmio, ex ipso etiam Tacqueto alibi, atque e Geometrarum Principe Isaaco Newtono, quem honoris etiam causa nomino, potissimum mutuo accepisse; perpauca enim quæ de penù proprio profero, digna non sunt quæ seorsim memorentur. Quæ vero de Elementis a Cl. Dno. de Chales editis depromsi, cum haud pauca sint, sine lineolis separatricibus cernuntur; reliqua vero hujusmodi uncinulis [] includuntur; Ita tamen universa, ut quæ Tacqueto nostro aliunde accedunt, Characteris diversitate ubique dignosci possint.

Cuiquam autem auctor esse nollem, ut librum integrum simul & semel sibi perlegendum imponat: In secundo enim libro, probationibus & illustrationibus nostris contentus esse potest, prima saltem vice; & in libro quinto, e Monito nostro ad Tyrones, generalium de proportionalibus ratiocinandi modorum probe memor, ad Librum sextum illico accedat; quem sane si tum nequeat intelligere, causam non dicam quin propositiones libri 5. particulares prius omittas repetat. Quæ etiam circa Paradoxorum de Contactus Angulo solutionem post prop. 16. Lib. 3. afferuntur, cum ad Elementa non pertineant, neque ita solida videantur, tuto omitti poterunt. Reliqua autem omnia (nisi forte nonnullas axiomaticum sua luce clarissimorum demonstrationes minus necessarias exceperis) digna sunt omnino quæ non tantum legantur, sed & firmiter memoriæ atque animis infixæ hæreant; tanquam Scientia inter humanas longe præstantissima & certissima principia vere Aurea, & nunquam satis laudanda; quibus quidem ducibus non tantum Geometria, sed & Physica etiam, & Astronomia extra Syderum Solisque vias in immensum creverunt, & etiamnum crescunt; dum scientia hujus Parentes Exæquat Victoria Cælo.

Scribebam Cantabrigiæ III. Calendarum Martii A. D. 1703.

De

De Editione tertia CANTABRIGIENSI
Monitum.

EDITIONEM hanc Euclidis Elementorum juxta Cl. Tacquetum, quo Tyronum usibus accomodatior atque instructior prodiret, quantum fieri posset perspicuam & explicatam dare serio adlaboratum est. Theoremata bene multa novis demonstrationibus muniuntur: alia, quibus ea penitus deerant, iisdem suppeditantur. Corollariis ac scholiis sparsim insertis, fulciuntur demonstrationes inde subsequente, ut iis sua firmitas & evidentie vis fortius ac melius constet. Propositionum complurium, quas usui quasi vix futuras omiserat Tacquetus, non pauca revocata sunt, atque eorum Auctori postliminio restituta. Additamenta quibus Vir Cl. Gulielmus Whistonus Editionem primam adornaverat, persape ulterius transponuntur, ne propositione aliqua viderentur niti, quae ante demonstrata non fuisset. Theorematum demonstrationes, ubicunque nimium breves visa sint, aut ad amissum non constructa, supplementis inditis pleniores, Tyronibusque (ut spero) faciliores redduntur. Nonnulla afferuntur, quae maxima ex parte, ab inclytis Geometris, magni nominis Viris decerpta sunt, ut inde instructior evadat hisce studiis prosequendis, quicumque ad veram Philosophiam tendit iter.

Hortandus est Matheseos studiosus, ut Elementis Geometriae Analyticam adjungat praxin. Hinc ei in disciplina tam sublimi felicius progredi, & cum illa familiarius versari licebit; imo & in ejusdem recessus abditos intimaque penetralia ei tandem introire fas erit.

Dabam XIII. Kal. April.
Anno Dom. 1722.

‘O ΘΕΟΣ

Ο ΘΕΟΣ Γεωμετρει.

TU autem, DOMINE, quantus es Geometra? Quum enim hæc scientia nullos terminos habeat; cum in sempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, TU uno hæc omnia intuitu perspecta habes, absque catena consequentiarum, absque tædio demonstrationum. Ad cætera pene nihil facere potest intellectus noster; & tanquam brutorum phantasia videtur non nisi incerta quædam somniare, unde in iis quot sunt homines, tot existunt fere sententiæ: in his conspiciatur ab omnibus, in his humanum ingenium se posse aliquid, imo ingens aliquid & mirificum visum est, ut nihil magis mirum; quod enim in cæteris pene ineptum, in hoc efficax, sedulum, prosperum, &c. TE igitur vel ex hac re amare gaudeo, TE suspicere, atque illum diem desiderare suspiriis fortibus, in quo purgata mente & claro oculo non hæc solum omnia absque hac successiva & laboriosa imaginandi cura, verum multo plura & majora, ex Tua Bonitate & immensissima sanctissimaque Benignitate conspicere & scire concedetur, &c.

Cl. Barrovii verba Apollonio suo præfixa.

SIGNORUM

SIGNORUM quorum frequens usus est in additionibus EXPLICATIO.

- $=$ *Signum aequalitatis.* Sic $a=b$ denotat quantitates a & b æquales esse.
- $+$ *Signum additionis.* Sic $a+b$ denotat summam quantitatum a & b .
- $-$ *Signum subductionis.* Sic $a-b$ denotat excessum quantitatis a supra b .
- o *Signum nihili.* Sic $a-b=o$ denotat a minus b (five excessum ipsius a supra b) æquari nihilo; & proinde quantitates a, b esse inter se æquales.
- $\times$ *Signum multiplicationis.* Sic $a \times b$ denotat productum ex quantitatibus a, b in se invicem multiplicatis.

Quandoque etiam quantitates productum efficientes, absque signo interposito conjunguntur. Sic AqE denotat productum ex multiplicatione quantitatis Aq per quantitatem E . [Et sic quoque apud ipsum Tacquetum (*Schol. p. 36. l. 11.*) ABC denotat solidum ex rectorum A, B, C multiplicatione continua productum. Aliquando tamen, Tacquetus quantitates addendas absque signo interposito conjungit. Sic in demonstr. p. 24. l. 5. AI denotat summam quantitatum A & I .]

Sit quantitas A dividenda per B : Quotiens sic $\left(\frac{A}{B}\right)$ notatur.

Et similiter, $\frac{7}{4}$ est quotiens numeri 7 per 4 divisi, five $1\frac{3}{4}$. Et cujuslibet fractionis (ut $\frac{1}{3}$) numerator (1) pro dividendo, denominator (3) pro divisore habendus est; & ipsa fractio ($\frac{1}{3}$) pro quoto.

$::$ *Signum rationum aequalium.* Sic $A:B::\alpha:\beta$, (vel $A.B::\alpha.\beta$) denotat eandem esse rationem inter A & B , ac inter α & β .

$\div\div$ *Signum proportionis continuae.* Sic $A,B,C\div\div$ denotat A esse ad B , ut B est ad C .

$\frac{q}{c}$ *Signum quadrati.* Sic CBq denotat quadratum lateris CB .

$\frac{q}{c}$ *Signum cubi.* Sic Ac est cubus lateris A .

$\sqrt{}$ *Signum radice quadratice.* Sic $\sqrt{5}$ est radix quadratica numeri 5; & $\sqrt{A+B}$ est radix quadratica summæ quantitatum A & B . Hoc est, si area quadrati sit 5, vel $A+B$; ejusdem latus quodlibet per $\sqrt{5}$, vel $\sqrt{A+B}$ denotabitur.

$\sqrt[3]{}$ *Signum radice cubice.* Sic $\sqrt[3]{5}$ est radix cubica numeri 5:

Et

Et $\sqrt[3]{cAqE}$ est radix cubica quantitatis AqE ; hoc est, si supponatur cubus solido AqE æqualis, erit $\sqrt[3]{cAqE}$ linea recta, lateri ejusdem cubi æqualis; quæ nempe in suisipsum quadratum ducta, ipsum cubum generat.

ADDENDA & CORRIGENDA.

IN præfatione Tacqueti, pag. 2. lin. 17. lege *solvuntur.*

In historica narratione, p. 2. lin. 31. lege *Auctor fuit.*

Pag. 13. lin. 19, 20. lege (*AC ipsi EF, CB ipsi FI, AB ipsi EI;*)

Ibid. lin. 21, 22. lege (*C ipsi F, A ipsi E, B ipsi I.*)

Pag. 33. lin. 35. lege *recti. Eodem modo constabit parallelogramma quæ unum angulum uni aequalem habent, esse equiangula.*

Pag. 49. lin. 30, 31. Sic lege:

Cor. 1. *Hinc liquet parallelogramma OI, HK circa diametrum quadrati, esse quadrata.*

Pag. 61. lin. 17. dele (*a*) cum nota marginali.

Pag. 88. lin. 15. pro proinde lege [*propter bisectionem*]

Pag. 106. lin. 27. lege *cum priore. Ducta enim AG, restarum AB, FG parallelismus e triangulorum ABF, ABG (i) (i) Per 4. aequalitate etiamnum (k) constabit.* l. 1.

Pag. 117. lin. 14. dele ea quæ parenthesi includuntur, (k) Per 40. l. 1.
necnon & notam marginalem.

Pag. 160. lin. 7, 8. lege *AC:CB::AE:ED, & AB:BC::AD:DE, & BA:AC::DA:AE. Ductis enim*

Pag. 198. lin. 19. lege *AI vel A2, rectilineo C aequale, & ad datam*

Pag. 223. lin. ult. dele (*m*) cum nota marginali: Et in marg. lege (1) *Per def. 15. l. 11.*

Pag. 231. lin. 14. lege *signum; habebitur datarum radicum cubicarum productum. Exempli gr.*

Pag. 253. lin. penult. pro & 25. l. 11. ejusque coroll. lege & p. 25. cum cor. 1. p. 24. l. 11. +

+ *Uid. pag. 180.*

Pag.

Pag.	Lin.	Lege
7	17	Tales sunt FBC,
9	9	ZD: ea
	21	in B & C.
	22	ducta esse recta
	25	DA: ergo
	36	ostendam, si
14	7, 8	hypothefim
25	15	angulo. alterno
30	39, 40	hujus, angulum rectum
31	12	ED <i>sive</i> CF,
36	22	& ducatur BL.
37	marg.	(b) Per 23. l. 1.
40	1	Scholium 1.
	10	Scholium 2.
	32	duabus rectis BF,
46	27	AC. Per
	34	Scholio 2.
	marg.	(d) Per 41. l. 1.
49	4	ducta diametro
	9	agatur HI. Propter
57	6	est quad. FL.
	marg.	(b) Per cor. 1. sch. p. 31. l. 1.
61	11	demissam
62	marg.	(a) Per cor. 4 p 4. l. 2.
70	25	centra,
73	21	ad BR,
78	8	apponantur
86	8	segmenti minoris
89	24	OF::BO:
90	11.	E.
	27	[E. D.]
95	20	tangentes BE, FE,
99	36	parallelogramma
100	33	transiens,
105	28	duos se secantes
108	25	ALXLBX5.]
115	9	æqualium, ut
	24	æqualitatem solū
124	12	(B;) & prima
129	17	corollarium
133	7	Ut B est ad C,

Pag.	Lin.	Lege
133	marg.	(c) Per 16. l. 5.
	25	Acum I ad B,
136	32	Corol.
138	4	& E ad F:
140	27	quam Q ex
	40	AB & L
143	24	& CE ablata
	29	erit OB minus
154	20	æquales esse
159	21	hoc est,
160	15	basim (AC;)
	19	(AB, CB;)
	20	basim secans,
	23	æquantur;
	32	ad BC; erunt
161	marg.	(h) Per hanc.
162	2	decussent
	penult.	inscripti,
164	3	uni (O,)
	9	S, T communis.
	marg.	(m) Per cor. 11. p. 32 l. 1.
168	antepen.	studiosorum,
	penult.	constructionem ac
	ult.	exhibebimus.
170	25	exinde patet,
171	25	(AB, BC, AF,)
172	35	per cor. 2.
174	28	GB, OF (d) æquan-
	tur,	
	30	ut GD ad
179	25	equalia facta
212	marg.	(a) Per 8. l. 11.
231	11	[Corol.
246	18	[Corol.
277	1	Circumferentia
304	14	parallelis
305	10	Ex. gr.
	13	oppositum, majus
313	19	eadem cum cylin-
	dro basi	
319	ult.	cor. preced.

AMICE

AMICE LECTOR.

CUM multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris forma, in hisce locis penuria laboratum esset, visum denique est ad usum studiosæ juventutis, cujus gratia hunc laborem qualemcunque suscepi, novam editionem adornare; in qua quid præstitum sit, paucis accipe.

1. Inprimis Geometriæ planæ ac solidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) semper in planis tyrones hæreant; sed ab his transeant ad solida; quorum summe necessaria cognitio est.

2. Propositionum hypothesibus & assertionibus literas, parenthesi inclusas, quibus ad figuram referri possint, apposui: quod eo consilio feci, ne ante demonstrationem, iterum explicanda assertio, adeoque idem bis repetendum esset: & tamen literis à reliquo sensu parenthesi separatis, sua assertioni universalitas constaret. Assertionem igitur conveniet legere primum literis prætermisiss; tum si non intelligas, te literæ ad figuram ducent.

3. Propositiones aliquas prætermisi, quarum fere vel nullus usus est, aut certe non alius, quam ut per eas demonstrantur aliæ, quas sine illis faciliiori via poteram demonstrare. Eosdem tamen propositionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque servo, quem bis mille annorum usus probavit.

4. Demonstrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodest. Ea siquidem tardiores & hebetiores non juvat, subtilibus autem & ingeniosis molesta est.

5. Quamvis autem brevis esse studuero, existimavi tamen, me à proposito non recedere, si ea adderem, quæ Geometriam discere volentibus futura

A

usui

usui videbantur. Itaque Corollaria & scholia adjunxi non pauca, quæ usu longo didici in elementis desiderari. Geometriæ practicæ fontes indico suis locis. Tum siquid illustre ad rem occurreret, non omisi. Varia deinde in quibus laboratum hucusque fuit, vel explicare vel demonstrare conatus sum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonstratur independenter ab undecimo axioma, quod non axioma, sed theorema est, & quidem non nisi difficulter ac longo circuitu demonstrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones solent, disposui ad eum fere modum, quo jam analytæ scribunt æquationes suas. Quem si exacte tenere voluissem, fuisset quidem res brevior; sed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. In libro tercio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hætenus torserunt omnes, solvuntur.

9. In quinto libro, proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, satis spinosam, efficere planiorem conatus sum. Itaque primum proportionum elementa faciliiori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri sextam definitionem, qua proportionum æqualitas per multiplices explicatur, ostendi non definitionem esse, sed theorema, & quidem difficile & perobscurum; cujus etiam demonstrationem exhibemus, hætenus à nullo datam. Atque ita demonstrationes Euclideanæ quæ hinc ducuntur omnes, si quis forte illas præ nostris probationibus desideret, stabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum assigno ac demonstro indicium universale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propositiones demonstrare potuissem, si hoc conducere discipulis judicasset. Postremo de proportionibus non pauca scitu necessaria subjungo; ac inprimis demonstro axioma illud percelebre seu potius theorema, proportionem extremorum ex quolibet intermediorum proportionibus componi,

componi, id quod hactenus in Geometria fuit desideratum.

10. *Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonstrationes discantibus terrori esse solent, alia via plus quam decies breviori demonstravi. Quod ita se habere, qui hæc nostra cum Euclide ejusque commentatoribus contulerit, deprehendet.*

11. *In libris quarto, sexto, undecimo præstantur ea quæ universim supra indicavimus.*

12. *Denique selecta ex Archimede theoremata, alia similiter ac breviori via demonstrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac sphaera doctrinam postremis tredecim propositionibus adjectis, ampliavi, quibus inter cetera demonstro sesquialteram proportionem ab eo in cylindro sphaeraque repertam, ab æquilatelo cono eidem sphaera circumscripto, tam in soliditate, quam in superficie continuari. Euclidi porro Archimede illa subnexui; non quasi adhuc elementa, sed quia subtilitate pariter atque usu eximia sunt: tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometria inventa admiranda assequi sese viderit, nihil in Mathesi futurum tam subtile vel arduum, quod his instructus elementis percipere non possit.*

Tu hæc habe; & si placuerint, lege ac disce; inventurus in his principia nobilissima, & forte omnium antiquissima scientiæ; quod ostendit tibi, quam sub-
necto,

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progressu Matheſeos,

MATHEMATUM elementa tradituro, visum est de illorum origine ac præstantia præfari quædam, ut intelligant Matheſeos candidati, cujusmodi ea scientia sit, cui se consecraturi sunt; & planum fiat adversus eos qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis sint hæc disciplinæ, quas omnium ætatum sapientissimi viri incredibili studio sibi putaverint comparandas. Usui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda, Petri Rami diligentia, qui scholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Historiam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliisque accurate copioseque conscripsit.

Prima hominum scientia Matheſis fuit, si Josepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. scribit Sethi nepotes Cælorum ordinem ac siderum cursus observasse. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus universalem mundi interitum fore prædixisset, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique sua inventa inscripserunt, ut si lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea superstes, hominibus discendi copiam faceret, & quæ inscripta continebat, spectanda exhiberet. Aiunt autem lapideam illam ab ipsis dedicatam, quæ & nostris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides esto.

Post diluvium primos mortalium Assyrios & Chaldaeos Mathematica coluisse tradunt idem Josephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldaeos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Assyria ad Ægyptios translatae sunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo jubente ex patrio solo in Palæstinam, ac deinde in Ægyptum profectus esset, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi studio, atque indole ad discendum egregia esse, ut apud eundem Josephum est lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Astronomiamque, quam præcedere, Geometriam necesse fuit, communicavit. Quibus deinde studiis adeo Ægyptii floruerunt, ut Aristoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto à sacerdotibus publica vacatione fretis inventas esse.

Exinde Mathesis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philosophos pervenit: Thales enim Milesius, qui ante Christum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum venisset, Geometriam inde in Græciam transtulit. Is sane, præter alia, primi libri propositiones 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. l. 4. cujus inventi lætitia elatus bovem immolasse dicitur. Idem Æquinoctia & Solstitia observare cœpit, Laertio teste; & Solis eclipsim, ut scribunt Hippasus & Aristoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipsim Lunæ Regi Cyro prænuñciasse. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ scientiæ parens atque Auctor fuit.

Post hunc Pythagoras Samius ille philosophorum antiquissimus, Mathematicas disciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philosophandi ex numeris duceretur. Geometriam vero,

ut refert Laertius, à materia abstraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed inprimis ob inventas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitia tanta affectus est, ut teste Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommensurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Astrologiam & Musicam impense & docuit & exercuit. Neque solum acute & subtiliter multa invenit, sed etiam ludum primus aperuit, in quo juvenus tam honestas, tamque nobiles artes addisceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius secuti sunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adolescentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum descriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam scriptam indicat Aristoteles; & ex Laertio accepimus ostensum ab eo Solem Peloponneso majorem (nota Astronomiæ incunabula,) eundemque de habitationibus in Luna nonnulla disputasse. Oenopidi adscribit Proclus 12. & 23. l. 1. Hos excepere Briso, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Aristotele reprehensi pariter & celebrati. Sed hos inter longe clarissimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philosophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut singularem & unicam omnis posteritas amplexa est. Illius etiam illa propria & magna laus est, quod Proclo teste, elementa primus scripserit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philosophia solum, sed etiam in Mathesi admirabilis fuit. Ejus tum Physica, tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt invidiā

vidia (ut quidam*ferunt) Aristotelis, sua unius scripta cupientis legi. Democriti Philosophiam Petrus Gassendus eruditissimo opere nuper edito instauravit. Theodorus Cyrenæus, licet ejus inventa Mathematica non extant, vel eo nomine magnus est, quod Platonis Magister fuisse memoratur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius splendorem majorem attulit Mathematicis disciplinis. Ille Geometriam maximis accessionibus amplificavit, studio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta est ab eo Analysis, certissima inveniendi & ratiocinandi via. Philosophiæ suæ libros, Mathematicis rationibus distinxit, ac quicquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philosophia esset, excitavit. Academiæ foribus inscriptum legebatur : *ἐδὲς ἀγνομή-
τητος εἰδίτω*: *nullus Geometriæ expertus accedit*: illustri sane argumento quam non aliena sed propria, quamque non inutilis, vel indecora, sed honesta & commoda Mathesis, sanæ certæque Philosophiæ sit. Quantus certe Plato Matheos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monumenta perlegerit.

Ex Platonis Academia prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum studiis Mathematica sit absoluta. Hinc Leodamas Thasius, Archytas Tarentinus, Theætetus Atheniensis; à quibus Mathemata egregie sunt amplificata. Leodamas Analysis à Platone acceptam exercuit, ejusque ope invenisse multa à Laertio dicitur. Theætetum tum inventa sua, inter quæ Elementa ab eo scripta & regularium corporum inscriptio celebrantur, illustrem faciunt, tum Platonis enco- mia, qui etiam illius nomini dialogum inscripsit.

Archytas Elementa scripsit etiam ipse, ejusque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa singularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos usus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volasse legitur apud Gellium. Quem secuti *Dædalus aliique artifices, fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis, copiis civium suorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leone fortassis discipulo illustrior quam inventis suis. Leon sane Mathematicæ universæ elementa conscripsit, auxit, & ad usum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores suo merito censeri debet.

Eudoxus Cnidius superiorum æqualis, in Arithmeticis magnus, & (si Scholiastæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus; Elementa item conscripsit, & generaliora effecit, & sectiones à Platone inchoatas auxit; insuper Astronomicarum hypothesium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut supra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heraclotes & Menæchmus, ejusque frater Dinostratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, omnes Platonici, Geometriam multo perfectiorem reddiderunt. Et Menæchmus quidem sectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt universaliora & auctiora. Atqui hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philosophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor,

&

* Error: multis enim seculis post Dædalum floruit Archytas

& Aristotelis magister, ipseque Aristoteles cognitione Mathematicum clari fuere. Illius cum auditor quidam esse vellet Geometriæ imperitus, Abi, inquit, anfas enim Philosophiæ non habes.

De Aristotele vero quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis sunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blaucanus. Ex Aristotelis schola duo præcipue celebrantur, Eudemus & Theophrastus. Hic scripsit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum: ille historiam Mathematicam condidit, ex quo Proclus alique sua mutuati sunt. Aristæo, Isidoro, Hypsicli, Geometris subtilissimis, solidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonstravitque accuratius, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juvenus instituitur. Obiit anno ante Christum 284. Euclidem secuti sunt centum fere post annis Eratosthenes & Archimedes. Eratosthenis clarum in primis nomen fuit, sed ejus scripta periere [*quam plurima, sed non omnia,*] Archimedis habemus multa, multa amissimus.

Sed Archimedes cum nomino, apicem quendam humanæ subtilitatis, totiusque Mathematicæ disciplinæ absolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, alique. Archimedi cœvus fuit Conon Geometra & Astronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedes & Cononem intervallo non magno sequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor [*imo septem*] Conicorum subtilissimi libri. Eidem adscribuntur Euclidis libri 14. & 15. ab Hypsicle

Hypsicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de subtenfis in circulo, hic 6. ille 12. libros primi conscripsere, pro quo invento tam utili & necessario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis sphaericis libri tres. Theodosii Tripolitæ utilissimi sphaericorum libri tres in omnium manibus versantur. Atque hi quidem, si Menelaum [*Isidorum, atque Hypsiclem*] excipias, ante Christum vixere omnes.

Anno post Christum 70. venit in lucem Claudius Ptolemæus, Astronomorum princeps, vir plane mirabilis, supraque (inquit * Plinius) naturam mortalium. Is vero non Astronomiæ tantum, sed etiam Geometriæ peritissimus fuit; quod restantur, tum alia multa ab eo scripta, tum in primis libri de subtenfis, Menelai quidem 6. Hipparchi vero 12. ab illo ad 5. theorematum contracti. Plutarchi etiam nominatissimi Philosophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Ascalonitæ erudita in Archimede[m] [*& Apollonium*] commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquam excellentium in Mathematicis Magistrorum inventa de duplicando cubo recensentur. Et Heronis quidem tam in Mechanicis quam in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita, à Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Ctesibii Alexandrini, cui antlias debemus nostras, admiranda opera à Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen est, quem Euclidi ipsi Proclus in quibusdam præposuit.

Diophantus, & ipse Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides; vere totius numericæ

* Error: Plinius enim Ptolemæo atate prior erat.

mericæ subtilitatis magister ; a quo reperta sit admirabilis illa ars, quam **Algebram** dicimus ; quæ hisce temporibus a **Francisco Vieta**, & **Renato Cartesio** multo perfectior & universalior effecta est. Reliqui inter veteres celebrantur **Nicomachus** Arithmeticis, **Geometricis**, **Musicis** clarus monumentis ; **Serenus binis** de cylindri [*& coni*] sectione libris, **Geometris** notissimus ; **Proclus**, **Pappus**, **Theon**. Quantus **Mathematicus** fuerit **Proclus** ex doctissimis ejus in **Euclidem** commentariis, aliisque scriptis manifestum est. Atque hic opinor ille est, qui, ut refert **Zonaras**, & ex eo **Ramus**, ac **Baronius**, sub annum **Christi 514**. **Vitaliani** classem **Constantinopolim** obsidentis, optico speculorum artificio combussit *. **Theonis** laudes vere magnas mirabiliter exaggerat **Petrus Ramus**, ut etiam libros, quos **Euclidi** hætenus adscripsere omnes, **Theoni** putet attribuendos. Sed iniquior ubique in **Euclidem** **Ramus**, neque ullo solido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando sit, agmen **Pappus** claudat tempore inter veteres [*fere*] postremus, ut qui vixerit circa annum 400. sed nominis claritudine, omnique laude **Mathematicum** primis adnumerandus. Quæ ante **Hypsiclem**, **Ctesibium**, & **Diophantum** protulerat fecunda ingeniorum parens **Alexandria**, hunc quoque ingenti bono **Matheseos** dedit. Scripsit collectionum **Mathematicarum** libros septem † a quibus duo primi perierunt *, Reliqui quinque ¶ tam multis abundant, tamque variis, ex omni prope genere **Mathematicum**

* *Duos ejusdem nominis male confundit Tacquetus. Proclus enim Lycius, quamplurimis in Philosophia ac Matheſi scriptis clarus, anno Christi 485. e vita decessit, ac proinde diversus est ab illo Proclo, qui Anastasio imperante Vitaliani classem incendit.*

† *Octo saltem. * Aut in Bibliothecis deliteſcunt. ¶ Sex*

tum nobilissimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus censeantur.

Habetis originis ac progressionis Mathematicæ historiam brevem. Ex qua Matheſeos antiquitas, præstantia, ac dignitas apparet. Sane Reip. literariæ Principes iidem qui Philosophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas sorores partu velut uno, quas qui distrahere ab invicem violente velit, nã ille in nativam illarum concordiam, cum insigni injuria crudelis fit; quando, quod fieri in gemellis solet, uno vel loco vel morte sublato, languere, quin & contabescere alterum necesse sit.



ELEMENTORUM GEOMETRIÆ.

LIBER PRIMUS.

SCIENTIÆ proprium munus est, ex notionibus quibusdam simplicissimis, rationali naturæ à conditore Deo impressis, elicere aliquid, quod prius ignorabatur, atque inderursum aliud ex alio; ut prior cognitio semper ad ulteriorem sit gradus. Quæ ratio si accurate teneatur, ex minimis & per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque scientiæ, præ omnibus amplexæ sunt eæ disciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione versantur. Quo fructu id factum sit, sciunt omnes, qui hisce studiis imbuti sunt. Et sane Geometria (ut de aliis Matheos partibus jam nihil dicam) mirum est, quam brevi ex apertissimis ad obscurissima trahat, & ex humillimis ad altissima statim assurgat. Statuuntur primo simplicissima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus dissentire possit. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non sit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano sensu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentia innotescunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, sunt tria; *Definitiones, Postulata, Axiomata.*

Voluit autem Euclides in primo hoc elementorum suorum libro prima Geometriæ principia exponere. Quod ut ordine fieret, Definitiones, sive vocum usitatissimarum explicationem præmittit: hisce vero Postulata superaddit nonnulla, ab omnibus sana mentis facile concedenda. Postea Axiomatis illis clarissimis quibus, natura atque ratione ducibus non possumus non assentiri omnes, propositis, Demonstrationes sive argumenta infallibilia ubique adhibet, ut veritatum Mathematicarum fidem vel a pervicacissimo Adversario, maximeque invito extorqueat. In primis autem de Lineis, variisque quos illa concurrente formant Angulis tractat: & propositionibus primis 8. de Triangulis planis agit: simulque Angulorum planorum naturam explicat. Post propositiones istas, Angulos Lineasque

neaeque bisecandi, & Perpendicularia sive excitandi sive demittendi methodum ostendit. Deinde vero alias Triangulorum, quin & linearum æquidistantium sive Parallelarum affectiones aperit. Hisce vero peractis, Quadrilaterorum, & speciatim Parallelogrammorum proprietates considerat; ostenditque qua ratione Polygona, sive figurae multangula & irregulares ad rectangula, aut parallelogramma, aut etiam triangula, figuras nimirum magis notas atque regulares, reduci queant. Postremo autem agmen claudit celeberrimum illud Theorema Pythagoricum, ejusque conversum: In omni Triangulo Rectangulo Quadratum Lateris quod recto angulo opponitur æquale esse duobus simul reliquorum laterum quadratis: Et, si quadratum unius lateris æquetur duobus simul reliquorum laterum quadratis, angulum illi lateri oppositum rectum esse.

DEFINITIONES.

1. **P**UNCTUM est signum in magnitudine individuum.

Hoc est, quod dividi ne cogitatione quidem possit. Punctum omnis magnitudinis quasi principium est, sicut unitas numeri.

2. Linea est magnitudo tantum longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini sunt puncta.

Fig. 1.

Tabula 1.

4. Recta linea est, quæ ex æquo suis terminis interjicitur. Vel ut Archimedes: Recta linea est minima linearum eisdem terminos habentium; sive est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possunt.

Vel ut Plato: Recta linea est, cujus extrema obumbrant omnia media. [Oculo nimirum in ipsa linea producta posito.]

Unus omnium sensus est.

Instrumentum quo rectæ lineæ describuntur, regula est: quæ utrum recta sit, hoc examine licebit cognoscere.

Juxta regulam describatur linea; tum regulam inversam, sic ut extremitas prius dextra jam sit sinistra, rursum applica lineæ prius descriptæ: si plane cum illa congruat, recta est regula; si non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies est magnitudo tantum longa & lata.

Duas ergo habet dimensiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema sunt lineæ.

7. Planum, sive superficies plana est, quæ ex æquo inter suas extremas lineas jacet.

Vel

Vel ut Hero : Superficies plana est, cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest.

Generatur enim superficies plana ex fluxu lineæ rectæ. [*Nimirum ex fluxu directo lineæ rectæ: alias enim fieri potest ut lineæ recta describat etiam superficiem curvam*]

Vel, Plana superficies est, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirum in ipsa superficie producta posito*]

Vel, Plana superficies est minima omnium eisdem terminos habentium. Idem sensus est omnium.

Non definivit hic corpus, sive solidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem desideret; Corpus est magnitudo longa, lata & profunda. Tres igitur dimensiones habet corpus, superficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus est duarum linearum, in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ BA, CA se mutuo tangentes in A, sic ut non existant sibi mutuo in directum; hoc est, non efficiant unam lineam.

9. Latera seu crura anguli, sunt lineæ quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli est punctum (A) in quo crura sibi mutuo occurrunt.

Cum angulus est unicus, una litera ad verticem posita designatur: Cum plures ad unum punctum existunt, designatur tribus literis, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam subinde unica lateribus prope verticem interposita. Sic in figura 5. angulus qui fit a lineis BA, CA designatur vel literis tribus BAC, vel unica O.

11. Anguli æquales, [vel potius similes] dicuntur; si, cum sibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. Ad hoc non requiritur, ut latera sint æque longa.

12. Inæquales, [seu dissimiles] dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. Sic angulus BAE major est angulo BAC. [*Hanc autem & præcedentem def. de angulis rectilineis intellige. Vide def. 13.*]

Angulus non minuitur vel augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione consistit, inclinatio autem linearum quantitas non est, neque angulus ullus quantitas erit. Et sane eodem jure curvitas esset quantitas, quo angulus, cum ab invicem non

magis

magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliisque Geometris angulos æquales esse dicemus, nihil aliud, quam inclinationum similitudo, hoc est, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi sumus post propositionem 16. l. 3. [Tacquetus hoc loco minus accurate de angulo differere videtur. Angulus quidem non est quantitas, sed tamen quantus est, hoc est, augeri potest, vel minui. Dux enim linea recta in puncto concurrentes, plures vel pauciores gradus divaricationis a se invicem habere possunt, adeoque & angulum majorem vel minorem constituere. Unde in definitionib. 15. & 16. angulus ille obtusus appellatur, qui recto major est; atque acutus qui recto minor. Angulus igitur quantitatis capax est, & alteri cuiusvis angulo proprie æqualis aut inæqualis esse dicitur. Eodem jure etiam curvitas est quantitatis capax, cum una quavis linea (vel superficies) a linea recta (vel superficie plana) magis aut minus recedere, hoc est, magis aut minus curva possit esse quam altera.]

Fig. 2. 4. 13. Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. [Sed vide quæ ad coroll. post prop. 16. lib. 3. adjecimus.]

Fig. 6. 14. Cum recta (CA) super rectam (BF) consistens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (CAB & CAF,) rectus est uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri insitens dicitur perpendicularis, seu perpendiculum.

Angulus rectus sic etiam definiri potest.

Fig. 6. Rectus angulus is est (BAC,) cui a parte altera æqualis oritur (CAF,) si unum latus (BA) produxeris.

Dux regulæ sic compactæ ut angulum rectum continent, instrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c. 2. l. 9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis est in rebus omnibus construendis, dimetiendis, formandis & firmandis, ut nihil fere effici sine illo possit. Normæ Examen sic instituitur. In quavis recta BF, sumpto puncto A, normæ latus AE applica rectæ lineæ AF, & juxta latus alterum describatur recta CA. Conversa deinde norma versus B, si utroque latere congruat rectis CA, AB, scito esse legitimam & exactam. Ratio patet ex ipsa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtusus angulus est (BAC,) qui recto (FAC) major est.

Fig. 8. 16. Acutus angulus est (LAI) qui recto (FAI) minor est.

17 Figura plana, est superficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.

18. Circulus est plana superficies, unius lineæ circuitu Fig. 9. comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua, ad aliquod punctum intra contentum (A,) omnes quæ duci possunt rectæ lineæ, sunt æquales.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

20. Diameter circuli est recta per centrum ducta (B C.) Fig. 9. ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens; [ut ex omnimoda semicirculorum sibi invicem superimpositorum congruentia abunde liquet.]

21. Semidiameter, sive radius, est recta (A F,) ex centro Fig. 9. ad circumferentiam ducta.

22. Semicirculus est figura (B L C) comprehensa adiametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.)

Circulus ita generatur. Si recta linea (A B) uno extremo Fig. 9. suo (A) manente fixo, in orbem circumagatur; recta ipsa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet.

Porro mira circuli indoles vel in ipso exortu suo apparet. Ad ejus namque genefim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quiescit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodo absolvant, diversa celeritate moventur. Tertio peripheria circulum ambiens, constat quodammodo ex contrariis & extremis sine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium est, ut æquale inter majus & minus; idqueo mirabilius est, quod ea contraria insint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Aristoteli visa sunt admiranda, ex quo illa depromptimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in dissertatione Physico-Mathematica, quam una cum Cylindricis & Annularibus in lucem emisimus anno 1652. Isthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiti solent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: semicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, est superficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, sive trilaterum, est plana superficies tribus rectis comprehensa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac simplicissima est, in quam cæteræ omnes resolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia. Fig. 10.

26. Triangulum Isosceles, seu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia. Fig. 11, 12.

- Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.
 Fig. 13. 28. Rectangulum triangulum est, quod unum angulum habet rectum.
 Fig. 12. 29. Obtusangulum triangulum est, quod unum angulum habet obtusum.
 Fig. 10, 11. 30. Acutangulum triangulum est, quod tres habet acutos angulos.
 Fig. 14, 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum est, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales; sive latera æqualia sint, sive non.
 Fig. 15, 32. Quadratum est, quod æquilaterum & rectangulum est, ac proinde æquiangulum.
 Omne quadratum est rectangulum, sed non contra.
 Fig. 16. 33. Rhombus est, qui æquilaterus, sed non æquiangulus est.
 Fig. 17. 34. Rhomboides, quæ adversa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula est.
 Fig. 14, 15, 16, 17. 35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera (A B, F C, & B F, A C) sunt parallela. Quid vero sint parallelæ, dicetur seq. defin.
 Omne rectangulum & quadratum est parallelogrammum, ut suo loco demonstrabitur; sed non contra.
 Fig. 18. 36. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes sunt, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus semper intervallis inter se distant.

Æqualia intervalla desumuntur penes perpendiculares. Quare si omnes ad unam ex duabus parallelam A B perpendiculares Q L, æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, si recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B semper perpendiculariter moveatur: tunc enim ejus extremum L describit parallelam C F.

Euclides definit parallelas esse rectas lineas, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ simul in infinitum productæ, licet ad se mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non sint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujusmodi sunt Hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem descriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per se notum esse, duas rectas, licet nunquam concurrant, fore semper æquali intervallo distitas, hoc est æquidistantes: posset enim quispiam objicere, fieri fortassis posse, ut etiam ipsæ, licet ad se mutuo semper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent.

Quare

Quare Euclidea definitio parallelismi naturam non satis explicat. [At non necesse est ut definitio Mathematica naturam rei definita explicet: est enim definitio nominis, non rei. Cum igitur Euclides eas rectas lineas nominaverit parallelas, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt; & cum semper postea in hoc sensu parallelas usurpaverit; cum denique eas definiverit per proprietatem ejusmodi, quæ nullis rectis nisi verè parallelis seu æquidistantibus convenit, non video quo jure culpari possit.]

37. Parallelogrammi & cujusvis quadrilateri diameter, [sive diagonalis,] est recta (AF) per angulos oppositos ducta.

Fig. 17.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus quam quatuor comprehensæ, multilateræ, seu multangulæ, seu Græca voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilinea figuræ externus angulus est, qui latere producto extra figuram oritur. Tales sunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos.

Fig. 19.

[40. Quando linea vel angulus vel figura quævis bifecari vel bifariam secari dicitur; intellige illorum quodvis in duas æquales partes esse divisum: Item trifecari, vel trifariam secari dicitur id quod in tres partes æquales dividitur; atque ita porro.]

Postulata.

Postulatum est, quod facile fieri posse per se sit manifestum. Postuletur ergo ut concedatur,

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam, in directum & continuum protendere.
3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum describere.

Axiomata.

Axioma est sententia per se manifesta.

1. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Et quod uno quovis æqualium majus aut minus est, majus quoque aut minus est altero æqualium.
2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.
3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

B 2

4. Si

gulum
gulum
acu-
quod
latera
gulum
ra.
iangu-
habens
us bina
. Quid
mum,
quæ in
ractæ,
ulares.
B per
B, C F
erpen-
tunc
in eo-
ctæ, in
æ quæ
ropin-
, licet
usmo-
recta;
criptæ,
rectas,
ervallo
objice-
mutuo
rerent.
Quare

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejusdem [vel æqualium] dimidia sunt, inter se sunt æqualia: & quæ ejusdem [vel æqualium] sunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter se æqualia sunt. [Item, inæqualium dimidia; vel dupla, tripla, &c. inæqualia erunt.]

7. Quæ mutuo sibi congruunt æqualia sunt.

Non recte Clavius hoc Axioma convertit. Falsum est enim, ea quæ universim inter se æqualia sunt, sibi mutuo congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruunt. Quod si similes & æquales fuerint, valebit conversa. Statuamus igitur axioma

*8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, sibi mutuo congruent; & anguli [rectilinei] si æquales fuerint, sibi mutuo congruent. [Et si circuli æquales fuerint, sibi mutuo congruent; & si ejusdem circuli, vel æqualium circulorum arcus fuerint æquales, sibi mutuo congruent arcus isti: Aut si quadrata, vel alia quacunque figura similes æquales fuerint, sibi mutuo congruent.]

9. Totum sua parte majus est: [æquale autem est omnibus partibus suis simul sumptis.]

10. Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

Fig. 20.

Euclidis axioma undecimum est: Si in duas rectas (AB, CF) incidens recta (GI) angulos ad eandem partem interiores (BLQ, FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores. Hoc vero non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet; si anguli (BLQ, FQL) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (AB, CF) nunquam concurrent. Quare axioma illud e principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliisque Geometris rejecimus; est enim non axioma,

Ex defin.

36.

31. hujus libri. Ejus loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur. Hoc est, recta, quæ ad parallelarum unam est perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21.

12. Perpendiculara bina (LO, QI) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

[Euclidis axioma undecimum (proprietas parallelismi demonstrandis inserviens) cuilibet perpendenti satis manifestum videtur. Quia vero Tacqueto libuit Euclidean Parallelarum

larum Definitionem loco movere, eique novam subrogare, æquum erat ut in Axiomatis hujus Euclidei locum, nova etiam axiomata duo, definitioni suæ Parallelarum magis accommodata substitueret.]

13. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune: & omnes rectæ punctualiter se intersecant.

Rectæ AX occurrat recta ZD; ea si producat non per-
get per DA, sed in E, sic ut rectam XA non nisi punctua-
liter intersecet. Axioma ex notione ipsa rectæ lineæ evi-
dentissimum est. [Imo vero ex ipsa definitione lineæ, qua
magnitudo tantum longa est, absque latitudine, satis patet omnes
omnium linearum, sive rectarum, sive curvarum, seu denique
rectæ & curva intersectiones, puncta esse.]

Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, ut
credant rectas lineas, aliqua sui parte commisceri posse, lubet
in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AX, AZ partem com-
munem AD. Centro A describatur circulus, secans rectas
in B & C. tum accipiat arcus BF æqualis arcui BC, & in-
telligatur ducta esse recta FA.

Rectæ igitur CA & FA eundem prorsus situm habent
respectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere
dicitur commune segmentum DA; ergo etiam recta FA
habet cum BA commune segmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA seg-
mentum habent.

Sumatur rursus arcus FG æqualis prioribus BF, & CB,
& intelligatur ducta esse recta GA. Rursus liquet rectas
BA, GA, eundem habere situm respectu rectæ FA. Sed
jam ostensum est rectam BA habere cum recta FA com-
mune segmentum DA. Ergo etiam recta GA cum FA com-
mune habet segmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA
segmentum habent. Eodem prorsus modo ostendam, si per
totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æ-
quales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad
A unum idemque habituras commune segmentum DA.
Hoc tam immane absurdum sequitur ex eo, quod pone-
rentur binæ rectæ CA, BA habere segmentum commune.
Impossibile est igitur ut duæ rectæ segmentum commune
habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in scholis
argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejusdem [vel æqualium] dimidia sunt, inter se sunt æqualia: & quæ ejusdem [vel æqualium] sunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter se æqualia sunt. [Item, inæqualium dimidia; vel dupla, tripla, &c. inæqualia erunt.]

7. Quæ mutuo sibi congruunt æqualia sunt.

Non recte Clavius hoc Axioma convertit. Falsum est enim, ea quæ universim inter se æqualia sunt, sibi mutuo congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruunt. Quod si similes & æquales fuerint, valebit conversa. Statuamus igitur axioma

*8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, sibi mutuo congruent; & anguli [rectilinei] si æquales fuerint, sibi mutuo congruent. [Et si circuli æquales fuerint, sibi mutuo congruent; & si ejusdem circuli, vel æqualium circularum arcus fuerint æquales, sibi mutuo congruent. arcus isti: Aut si quadrata, vel alia quacunque figura similes æquales fuerint, sibi mutuo congruent.]

9. Totum sua parte majus est: [æquale autem est omnibus partibus suis simul sumptis.]

10. Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

Fig. 20.

Euclidis axioma undecimum est: Si in duas rectas (AB, CF) incidens recta (GI) angulos ad eandem partem interiores (BLQ, FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores. Hoc vero non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet; si anguli (BLQ, FQL) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (AB, CF) nunquam concurrent. Quare axioma illud e principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliisque Geometris rejecimus; est enim non axioma, sed theorema, idque demonstrabimus post Propositionem 31. hujus libri. Ejus loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma

Ex defn.

36.

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur. Hoc est, recta, quæ ad parallelarum unam est perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21.

12. Perpendiculara bina (LO, QI) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

[Euclidis axioma undecimum (proprietatibus parallelismi demonstrandis inserviens) cuilibet perpendiculari satis manifestum videtur. Quia vero Tacqueto libuit Euclideam Parallelarum

larum Definitionem loco movere, eique novam subrogare, a-
quum erat ut in Axiomatis hujus Euclidei locum, nova etiam
axiomata duo, definitioni suæ Parallelarum magis accommodata
substitueret.]

13. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum com-
mune: & omnes rectæ punctualiter se interfecant.

Rectæ AX occurrat recta ZD; ea si producat non per-
get per DA, sed in E, sic ut rectam XA non nisi punctua-
liter interfecet. Axioma ex notione ipsa rectæ lineæ evi-
dentissimum est. [Imo vero ex ipsa definitione lineæ, qua
magnitudo tantum longa est, absque latitudine, satis patet omnes
omnium linearum, siue rectarum, siue curvarum, seu denique
rectæ & curvæ intersectiones, puncta esse.]

Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, ut
credant rectas lineas, aliqua sui parte commisceri posse, lubet
in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AX, AZ partem com-
munem AD. Centro A describatur circulus, secans rectas
in B & C. tum accipiatur arcus BF æqualis arcui BC, & in-
telligatur ducta esse recta FA.

Rectæ igitur CA & FA eundem prorsus situm habent
respectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere
dicitur commune segmentum DA; ergo etiam recta FA
habet cum BA commune segmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA seg-
mentum habent.

Sumatur rursus arcus FG æqualis prioribus BF, & CB,
& intelligatur ducta esse recta GA. Rursus liquet rectas
BA, GA, eundem habere situm respectu rectæ FA. Sed
jam ostensum est rectam BA habere cum recta FA com-
mune segmentum DA. Ergo etiam recta GA cum FA com-
mune habet segmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA
segmentum habent. Eodem prorsus modo ostendam, si per
totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æ-
quales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad
A unum idemque habituras commune segmentum DA.
Hoc tam immane absurdum sequitur ex eo, quod pone-
rentur binæ rectæ CA, BA habere segmentum commune.
Impossibile est igitur ut duæ rectæ segmentum commune
habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in scholis
argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis

omnino indivisibilibus numero finitis componi non posse: & est ejusmodi. Consent, si fieri potest, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum descriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima seu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus singulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum est, rectas illas nusquam committeri, nisi in centro solo. Quare dum omnes medias peripherias pertranseunt, in iis æque multa designant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis constant, ac proinde omnes inter se æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta descripta, æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonstrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quod passim sit decantata, & ex præsentis axiomate immediate pendeat.

[15. *Aequalium circulorum diametri erunt æquales; ut & eorum semidiametri sive radii æquales erunt. Et si duorum circulorum radii (aut diametri) æquales fuerint, circuli erunt æquales. Idem puta de æqualium quadratorum lateribus & diametris; aut de quarumcunque figurarum similium & æquali-*

(a) Vide def. 11. l. 5. & def. 1. l. 6. *um lateribus & diametris (a) homologis: & conversim, ex æqualitate homologorum laterum aut diametrorum, concludes figurarum similium æqualitatem.*

16. Porro etiam, majoris circuli diameter major est, minoris minor: & vicissim. Idem puta de quadratorum inæqualium lateribus aut diametris; nec non de figurarum quarumcunque similium & inæqualium lateribus & diametris homologis: & vicissim.]

Propositionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in sola contemplatione sistunt, quæ idcirco Theoremata inscribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requisitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propositiones, primus numerus designat propositionem, litera (l) cum numero sequenti librum denotat: ut si occurrat (per 5. l. 3.) ita leges; (per propositionem quintam libri tertii.) Figura quærenda semper est inter figuras ejus libri, in quo tum versamur; citationes reliquæ facile intelliguntur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propositiones illustriores sunt 32, 35, 37, 41, 44, 45, 47.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta (AB) triangulum æquilaterum *Fig. 23.*
constituere.

Centro A , intervallo AB (a) describatur circulus FCB ; (a) *Per postul. 3.*
& centro B , intervallo eodem BA describatur circulus ACL , priorem secans in puncto C , ex quo ducantur rectæ CA , CB .

Dico triangulum ACB factum esse æquilaterum. Nam
recta AC est (b) æqualis rectæ AB , cum sint ejusdem circuli FCB semidiametri; & recta BC etiam æqualis est ei-
dem rectæ BA , cum ambæ sint semidiametri circuli LCA . (b) *Per def. 18.*
Ergo AC , BC (c) sunt æquales inter se: ac proinde omnia
latera trianguli sunt æqualia. Ergo triangulum ACB & (d) æ- (c) *Per axio. 1.*
quilaterum est, & super data recta AB constitutum, quod (d) *Per def. 25.*
erat faciendum.

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum (A) datæ rectæ (EF) æ- *Fig. 24.*
qualem ponere.

Accipe circino (e) intervallum EF , & transfer ex A in D , (e) *Postul. 3.*
erit recta AD par datæ EF

PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) *Fig. 24.*
minori (EF) parem auferre (GI .)

Accipe circino (f) intervallum minoris datæ EF , & trans- (f) *Postul. 3.*
fer in majorem ex G in I .

PROPOSITIO IV.

Si duorum triangulorum (X , Z) latus unum (BA) *Fig. 25.*
uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) sit
æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti,
etiam sint æquales; æquabuntur etiam & bases (BC ,
 FI), & tota triangula (X , Z), & reliqui ad basim
anguli (B , F & C , I) qui lateribus æqualibus oppo-
nuntur.

- Nam si intelligamus triangulum Z triangulo X superponi,
 (a) *Per axio.* latera LF, LI perfecte congruent (a) sibi æqualibus lateribus AB, AC, sic ut puncta tria L, F, I, cadant supra tria puncta A, B, C. Ergo tum etiam basis FI tota cadet supra totam basim BC. Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula sibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia sunt, Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Fig. 25.

Simili fere ratiocinio, theorema sequens, cujus mox erit usus, licebit demonstrare.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipsis F & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa, æqualia erunt.

- Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F & I, si
 (b) *Per axio.* latus FI imponas lateri sibi æquali BC, illi (b) congruet.
 3. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, etiam
 (c) *Per axio.* (c) FL cadet supra BA, & IL supra CA. Ergo etiam
 3. punctum L incidet in punctum A; (si enim caderet extra A, latera FL, IL non inciderent in latera BA, CA.) Ergo omnia sunt per axioma 7. æqualia.

PROPOSITIO V.

Fig. 26.

Trianguli Isoscelis seu æquicruris ad basim anguli (A, C) æquales sunt.

- Intelligatur triangulum ABC bis positum; sed situ converso *cba*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *cba*, ex hypothese æquale est latus AB, lateri *cb*, & latus CB lateri *ab*, & angulus B angulo *b*; etiam (d) ab basim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonstrandum. Iidem enim sunt anguli C & *c*.

Corollarium.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI in triangulo (ABC) duo anguli (A & C) Fig. 26.
 æquales fuerint, etiam latera (AB , BC) iis op-
 posita, equalia erunt.

Intelligatur triangulum ABC bis positum, sed situ con-
 verso cba . Quoniam igitur in duobus triangulis ABC , cba
 æquatur latus unum AC uni lateri ca , & angulus A angulo
 c , & angulus C angulo a ; etiam reliqua omnia (a) erunt ^{(a) Per Schol.}
 æqualia, ac proinde latus AB æquabitur lateri cb ; quod erat ^{prop. 4.}
 demonstrandum. Eadem enim sunt lineæ CB & cb .

Corollarium.

Æ Quia ergo triangulum, etiam æquilaterum
 est.

PROPOSITIO VII.

EST propter 8. quæ sine illa seorsim proposita de-
 monstrabitur.

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula (X, Z) [vel X, Y] habuerint Fig. 27.
 omnia latera sibi mutuo equalia (AC ipsi EF ;
 CB ipsi FI ; AB ipsi EI ;) etiam angulos omnes æ-
 qualibus lateribus oppositos habebunt æquales (C ipsi
 F ; A ipsi E ; B ipsi I .)

Ponatur enim latus AB supra sibi æquale EI , [ita ut
 punctum A coincidat cum E , ac B cum I , & reliqua late-
 ra cadant ad eandem partem rectæ AB vel EI .] Tum vero
 punctum C , vel incidet in punctum F vel non. Si incidat
 in F , tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli
 (b) æquales erunt. Cadet vero punctum C in punctum F . ^{(b) Per axio.}
 Nam ^{7.}

Centro E , semidiametro EF , describatur circulus; & centro
 I , semidiametro IF , describatur circulus. Punctum C ob la-
 tera

tera aequalia erit in circuli utriusque circumferentia, atque adeo in utriusque circumferentia communi intersectione F.
Q.E.D.

Fig. 28.

Si C cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypothesim latera EF, AC æquantur, erit (a) angulus EFC par angulo ECF. Ergo IFC major erit quam ECF. Ergo IFC multo major erit quam ICF. Rursum, quia per hypothesim IF, BC æquantur, erit IFC (b) par ICF. Ergo IFC & multo major est quam ICF, & æqualis, quod est impossibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo, &c.

Plures casus, quos hoc theorema admittit, consulto prætermisi, ne tyrones fatigarem. Neque vero difficulter eorum demonstratio ex demonstratione jam posita elicitur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29.

Datum angulum rectilinum (IAL) bifariam secare.

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B ac C describe duos æquales circulos se secantes in F, ducaturque recta FA. Hæc angulum bifecabit.

Ducantur enim BF, CF; triangu-
la FAB, FAC sunt sibi mutuo æquilatera; nam latera AB, AC ex constitutione æqualia sunt, & latera BF, CF, quia (c) æqualium circularum semidiametri, etiam æquantur; & AF utrique triangulo commune est. Ergo anguli BAF, CAF (d) æquales sunt. Bifectus (e) est ergo datus angulus IAL, quod erat faciendum.

40.

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. singulas nimirum partes iterum bifecando.

Scholium.

Methodum secandi angulos in æquales quoscunque, circino & regula hætenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quasdam lineas, quadratricem videlicet & spiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli trisectio perficitur a Pappo l. 4. prop. 31. præsidio hyperboles, quod etiam obtineri potest ope parabolæ, vel conchoidis.

Mecha.

Mechanice datum angulum in quocunque secabis æqua- Fig. 30.
les angulos, si ex anguli vertice A tanquam centro intra
anguli crura arcum describas, eumque divides in quot pla-
cuerit æquales partes; rectæ enim ex A per divisionum
puncta emissæ, angulum secabunt in partes totidem æ-
quales.

PROPOSITIO X.

Datam rectam finitam (*AB*) secare bisari- Fig. 31.
am.

Super data *AB* fac triangulum æquilaterum (*a*) *AGB*, (*a*) Per 1.
[vel etiam isosceles æqualium crurum *AG*, *BG*.] Angulum *l. 1.*
ejus *G* (*b*) biseca per rectam *GC*. Eadem bisecabit rectam (*b*) Per præ-
AB datam. ced.

Nam in triangulis *X*, *Z*, latus *CG* est commune, & per
constructionem *GB*, *GA* æqualia, angulique iis contenti
AGC, *BGC* æquales. Ergo bases *AC*, *BC* (*c*) æquantur. (*c*) Per 4. 2.
Bisecta (*d*) est ergo data *AB*. Quod erat faciendum. 1.

Pro praxi satis erit centris *A* & *B* duos æquales circulos (*d*) Per def.
describere, se secantes in *G* & *L*, ac ducere rectam *GL*. 40.

PROPOSITIO XI.

EX dato puncto (*A*) in data recta (*LI*) per- Fig. 32.
pendicularem excitare.

Circino cape æquales *AC*, *AF*. Centris *C* & *F* describe
duos æquales circulos se secantes in *B*. Ex *B* ad *A* ducta
recta erit perpendicularis.

Ducantur enim *CB*, *FB*. Triangula *X* & *Z* sibi mutuo
æquilatera sunt [propter latus *AB* commune, latera *AC*, *AF*
æqualia per constructionem, & latera *BC*, *BF* æqualia per
axio. 15.] Ergo anguli *CAB*, *FAB* (*e*) æquales sunt. Ergo (*e*) Per 8. l. 1.
BA (*f*) perpendicularis est. Ex dato igitur puncto, &c. (*f*) Per defn.
Quod erat faciendum. 14.

Praxis tam hujus quam sequentis expeditur facillime præ-
sidio normæ.

PROPOSITIO XII.

Fig. 33.

EX dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendiculararem ducere.

(a) Per 10.
l. 1.

Centro A describe circulum, qui secet datam LQ in C & I . Rectam CI biseca (a) recta AB . Ea erit perpendicularis.

Ducantur enim AC , AI . Quoniam per constructionem (b) Per 8. l. 1. triangula X & Z sunt sibi mutuo æquilatera; erunt anguli (b) (c) Per def. CBA , IBA æquales. Ergo AB perpendicularis (c) est. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34.

Recta (BA) super rectam (CF) consistens, aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.

Nam si BA insistat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC , BAF utrimque recti. Si vero BA insistat oblique, excitetur (d) perpendicularis AL . Quia tum anguli inæquales CAB , FAB eundem locum occupant, quem duo recti CAL , LAF , ac proinde iis congruunt, erunt (e) his illi æquales. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. **E**odem modo demonstrabitur, si plures rectæ quam una, eidem rectæ ad idem punctum insistant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 38.

2. Duæ rectæ se invicem secantes BAC , FAL efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos.

Fig. 35.

3. Omnes anguli circa unum punctum constituti, efficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. sunt enim quatuor recti in plures partes secti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 36.

SI duæ rectæ (XR , ZR) ad idem utrimque punctum rectæ QR faciant angulos (XRQ , ZRQ) duobus

duobus rectis aequales; (XR, ZR) unam rectam efficient.

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli (a) Per 13. XRQ, QRB (a) conficiunt duos rectos, quod (b) est absurdum, cum ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficient. (b) Contra axio. 9.

Coroll. Hinc in Catoptrica colligimus lucis radium, inter reflexe- Fig. 37.
tendum, per angulum reflectionis angulo incidentia aequalem tendentem, per viam omnium brevissimam ferri. Ubi nempe anguli BED, AEF aequantur, linea AE & EB simul sumpta, lineis quibuscumque, puta AF & FB simul sumptis sunt breviores. A puncto enim B (c) demittatur linea perpendicularis BC : (c) Per 12. & fiant BD & CD aequales: ducantur etiam EC & FC . In l. 1.
triangulis BED & CED , cum latus DE sit utrique commune, & latus BD lateri DC ex constructione aequale, Angulus etiam BDE angulo CDE (d) aqualis; (e) aequabuntur reliqua omnia; (d) Per def. eritque BE aequalis CE , angulusque BED angulo DEC aqualis. 14.
Et, si aequalibus BE, CE addatur EA , erit summa linearum (e) Per 4. BE & EA aqualis summa linearum CE & EA . Et cum ex l. 1.
hypothese aequentur anguli BED, AEF ; & angulus BED antea ostensus sit aqualis angulo DEC ; ergo & angulus AEF aequatur (f) angulo DEC ; & addito communi angulo (f) Per axis. DEA , summa angulorum DEA, DEC aequabitur summe angulorum DEA, AEF . Sed anguli DEA, AEF conficiunt (g) duos rectos. Ergo & anguli DEA, DEC sunt (g) Per 13. duobus rectis aequales, & proinde (per hanc prop.) linea AE, EC unam rectam CA efficiunt, quae ex ante demonstratis, aequatur summa rectarum AE & EB .

Eodem modo in triangulis BDE, CDE , demonstrabitur aequalitas linearum BF & CF ; itemque addito communi AF , ostendetur summam linearum AF & FB , summam linearum AF & FC aequalem esse. Sed CA , (hoc est, summa linearum AE & EB) minor est quam summa linearum AF & FC , (hoc est, quam summa linearum AF & FB) per definitionem recta linea, quae minima est omnium quae inter puncta A & C duci possunt. Ergo linea AE & EB simul sumpta, lineis AF & FB simul sumptis sunt breviores. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI duae rectae (BC, FL) se secuerint (in A) Fig. 38.
erunt anguli ad verticem (A) oppositi, aequales.
Nimirum

- Nimirum LAB ipsi CAF, & BAF ipsi LAC. Nam
 (a) Per 13. quia BA insitit rectæ LF, erunt LAB, FAB (a) pares
 l. 1. duobus rectis. Et quia FA insitit rectæ BC, erunt (b)
 (b) Per eand. quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo (c) duo si-
 (c) Per axio. mul LAB, FAB æquantur duobus simul CAF, FAB. Ab-
 1. lato igitur communi FAB, remanent (d) æquales LAB,
 (d) Per axio. CAF. Eodem modo ostendam æquales esse BAF, LAC.
 3.
 Fig. 39.

- Coroll. Hinc illi qui sphaerulis eburneis & proinde eläs-
 tificis ludunt, pilam adversariam percutiendo amovere dis-
 cant. Sit sphaularum altera impellenda B, altera que impel-
 lenda est A; Latus vero rectilineare CD: Esto linea BE linea
 (e) Per 12. CD (e) perpendicularis, & sit DE æqualis BD, & ducatur
 l. 1. recta AE secans CD in F, & jungatur BF. Si pila secun-
 dum rectam AFE impellatur, ad punctum F ita reflectetur, ut
 post reflectionem ad B tendat. In triangulis enim BFD, EFD,
 Latus FD, est utrique commune, & Latus DB lateri DE
 æquale, & anguli ad D æquales sive recti. Tota itaque tri-
 (f) Per 4. angula (f) æquantur: & proinde angulus BFD angulo DFE,
 l. 1. sive ad verticem opposito (g) AFC æqualis est. Angulus autem
 (g) Per 15. AFC est angulus incidentia, & Angulus BFD angulus re-
 l. 1. flectionis: qui cum in omnibus corporum perfecte elasticorum
 reflectionibus sibi invicem æquantur, liquet pilam A eläs-
 ticam versus E tendentem, ad pilam B post reflectionem pergere,
 eamque impellere debere. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI. XVII.

Continentur in prop. 32. [Et in eiusdem prop.
 corollariis demonstrantur.] Neque ante illam
 adhibentur.

PROPOSITIO. XVIII.

- Fig. 40. IN omni triangulo, angulus (A) major est; qui
 majori lateri (BO) opponitur: (B) minor, qui mi-
 nori (AO.)

- (b) Per 6. Nequit A esse par B, alias (b) latera BO, AO æquaren-
 l. 1. tur, contra hypothesim. Nequit etiam A minor esse quam B.
 Nam si A minor est, B major, poterit intra angulum B,
 per rectam BF, fieri angulus ABF æqualis A. Tum vero
 per 6. æquales erunt BF, AF, & si addas utrique OF,
 erunt BF, FO æquales AO. Sed AO per hyp. minor est
 quam

quam BO. Ergo etiam BF, FO minores sunt quam BO, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ est omnium brevissima. Angulus igitur A nec minor est angulo B, nec æqualis. Ergo major; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN omni triangulo, latus (BO) majus est, quod oppositur majori (A) angulo: (AO) minus, quod minori. Fig. 40.

Est conversa prioris. BO non est minus quam AO, alias per 18. angulus A esset minor angulo B, contra hyp. Neque etiam BO æquale est AO, alias per 5. anguli A, B æquarentur, rursus contra hyp. Ergo BO majus est quam AO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo qualibet latera reliquo sunt majora.

Est Archimedi instar axiomatis; immediate siquidem patet ex definitione Archimedea lineæ rectæ, quam vide supra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

SI a terminis unius lateris (AB) intra triangulum due rectæ jungantur (AO, BO;) hæc lateribus trianguli (AC, BC) minores sunt, majorem vero angulum (AOB) comprehendunt. Fig. 41.

1. Pars. Produc AO in F. AC, CF sunt (a) majores (a) Per 20. quam AF. Addita ergo communi FB, erunt AC, BC majores quam AF, FB. Rursus OF, BF sunt (b) majores quam OB. Addita ergo communi AO, erunt AF, FB majores quam AO, OB. Ergo AC, CB sunt multo majores, quam AO, OB.

2. Pars demonstrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 22. Ea interim non utemur.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 42.

EX datis tribus rectis (BO , LB , LO) quarum due qualibet reliqua sint majores, triangulum constituere.

Assumatur datarum una BL , atque una ejus extremitate B accepta pro centro, intervallo alterius datae BO describatur arcus.

Deinde accepta pro centro extremitate altera L , intervallo tertiae LO describatur arcus priorem secans in O : ducanturque rectae BO , LO . Dico factum.

Demonstratio patet ex constructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 43.

AD datum in recta punctum (B) angulum efficere aequalem dato (A).

Ducatur utcumque CF secans latera dati anguli A . In data recta ex B accipe BL parem AF . Centro B intervallo AC describe circulum: item alium centro L intervallo FC qui priorem secet in O . Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A .

Nam per constr. trianguula sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A sunt æquales.

Fig. 43.

Cor. 1. Hinc lineam inaccessam AB metiri licet. A puncto enim quocunque C observetur angulus ACB . & mensurentur lineae AC , BC : & in plano quocunque accessibili, ad punctum F , super recta infinita EF , fac angulum angulo C aequalem, & mensurentur lineae FD , FE , lineis AC & BC respective aequales, & jungatur DE : Erit haec aequalis linea inaccessa AB . Nam in triangulis ACB , DFE , propter latera AC , CB lateribus DF , FE respective aequalia, & angulum C angulo F aequalem, erit (a) basis AB basi DE aequalis.

(a) Per 4.
l. 1.

Fig. 44.

(b) Per 11.
l. 1.

(c) Per hanc
pr.

(d) Per
postul. 2.

Cor. 2. Hinc etiam alia ratione, Thaletem secuti, lineam inaccessam metiri discimus. Sit linea inaccessa AD cui ad extremum ejus punctum A (b) erigatur perpendicularis AC , & capiaturs angulus ACD , eique ex altera parte lineae AC , (c) aqualis constituatur angulus ACB , & (d) producantur DA ,

*D*A, *CB* donec concurrant in *B*. Linea *AB* accessibilis, erit linea inaccessa *AD* aqualis. Nam in triangulis *ABC*, *ADC*, ob *CA* ipsi *BAD* perpendicularem, anguli ad *A* sunt recti, & proinde aequales; & anguli ad *C* sunt aequales per constr. (a) Per Schol. post p. 4. l. 1.
& latus *AC* commune. Ergo (a) omnia reliqua erunt aequalia, & latus *AB* lateri *AD* aequale erit.

Scholium.

IN gratiam tyronum visum est hic nonnulla ad praxim angulorum necessaria proponere.

Anguli mensura est circuli peripheria, quæ ex *A* vertice anguli tanquam centro describitur, ut patebit ex prop. ultima lib. 6. Fig. 45.

Itaque quot gradus continebit arcus *BC* inter anguli *BAC* crura interceptus, tot graduum dicetur esse angulus *BAC*. Et quoniam rectum angulum *BAF* metitur quadrans peripheriæ *BF*, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus esse graduum 90. Similiter quia duos rectos mensurat dimidia circumferentia in 180. gradus secta, & quatuor rectos circumferentia tota secta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis, praxes angulorum sunt,

1. Ad datum in recta *BL* punctum *B*, angulum statuere parem dato *A*. Ex *A* dati anguli vertice, tanquam centro, inter latera, arcum describe *CF*. Centro *B* puncto dato, describe eodem intervallo arcum *LZ*, ex quo aufer *LO* parem *CF*. Per *B* & *O* duc rectam: erit *LBO* par dato *A*. Fig. 46.

2. Dati anguli *OPQ* gradus examinare. Fit hoc facillime per semicirculum corneum transparentem, in 180. gradus divisum. Centrum semicirculi pone supra *P* verticem anguli, & semicirculi radium *PL* supra anguli latus *PQ*. Arcus *LO*, inter anguli crura interceptus, ostendet quot graduum sit datus angulus. Fig. 47.

3. Angulum construere datos continentem gradus. ut 42. Fig. 47.
Duc rectam *XQ* in qua signa punctum *P*. Super *P* pone semicirculi centrum, ejusque semidiametrum *PL* supra *PQ*. Ab *L* numera gradus 42. usque in *O*. Per *O* ex *P* ducta recta dabit angulum *OPL* graduum 42.

Horum omnium demonstratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

[Coroll. Cognito angulo *BAF*, cognoscitur una ejusdem complementum ad duos rectos *CAF*. Sit e. gr. angulus *BAF* graduum 70: erit angulus *CAF* graduum 110. Numeri
anim

enim isti simul additi, gradus 180. angulorum rectorum duorum mensuram conficiunt.]

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 48.

SI duo triangula (BAC , BAF) duo latera (BA , AC) duobus (BA , AF) alterum alteri, aequalia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (BAF) majorem habeat altero (BAC ;) habebit quoque basim BF majorem basi (BC .)

Et si basim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

[Si latera BA , AF (seu BA , AC) sint inequalia; applicentur ad se invicem latera minora BA Tum]

- Centro A describe per C circulum; is transibit per F ,
 (a) Per def. quia AC , AF pronuntur æquales. Ergo BF cadit [intra (a)
 4. circulum] supra C ; [hoc est, inter punctum A & punctum C .]
 Junge CF . Angulus BCF est major angulo ACF , hoc est,
 per 5. angulo AFC , hoc est, multo major angulo BFC .
 (b) Per 19. Ergo [In triangulo BCF ,] (b) BF opposita majori angulo
 4. 1. BCF , major est quam BC opposita minori BFC .

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

- [Angulus enim BAF non est minor angulo BAC ; nam
 (c) Per pri- si ita, basis BF basi BC minor (c) esset, contra hypothesim:
 mam par- Sed nec aqualis est angulus BAF angulo BAC ; quia si es-
 tem hujus. set, basis BF basi BC (d) æquaretur, iterum contra hypo-
 (d) Per 4. 1. thesim. Cum vero angulus BAF angulo BAC nec minor
 sit, nec aqualis; necesse est ut sit major. Q. E. D.]

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25.

SI duo triangula (X , Z) duos angulos duobus aequales habuerint, alterum alteri, (B ipsi F , & C ipsi I), & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos existit, (ut BC , FI .) vel quod uni æqualium angulorum opponitur, (ut AC , LI ;) reliqua omnia erunt æqualia.

Ponantur

Ponantur primo æqualia esse latera BC, FI, inter æquales angulos posita: tum vero reliqua etiam omnia æqualia esse demonstratum est in scholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI, æqualibus angulis B & F opposita, esse æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. prop. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua sunt æqualia.

[Scholium. *Quædam hoc loco de perpendiculari in triangulo Fig. 49. isoscelio, quæ basem & angulum verticalem bisecat, inferere visum est. Sit ABC triangulum isosceles, cujus vertex A, basis BC, crura æqualia AB, AC. Dico,*

1. Si ab angulo verticali A ducatur (a) recta AD basi (a) Per 12. perpendicularis; bisecabit ea tum basem, tum angulum ver- l. 1.
ticalem. In triangulis enim ABD, ACD, propter latera AB, AC
invicem (b) æqualia, & AD utrique commune, & angulos (b) Per hy-
lateribus æqualibus oppositos etiam æquales, nempe (c) $B =$ porb
C, & $ADB =$ (d) ADC ; omnia reliqua erunt (e) æqualia, (c) Per 5.
nempe latus BD lateri DC, & angulus BAD angulo l. 1.
DAC. Quare perpendicularis AD bisecat (f) tum basem (d) Per def.
BC, tum angulum verticalem BAC. 14.

2. Si recta AD ab angulo verticali ducta bisecet basem, l. 1.
bisecabit etiam angulum verticalem, & basi perpendicularis (f) Per def.
erit. Cum enim basis BC bisecta sit in D, triangula ABD, 40.
ACD erunt sibi mutuo æquilatera, ac (g) proinde sibi mu- (g) Per 8.
tuo æquiangula. Anguli igitur BAD, CAD æquales sunt, at- l. 1.
que adeo (h) bisecatur angulus BAC: anguli etiam ad D æ- (h) Per def.
quales sunt, ac proinde (i) AD est basi perpendicularis. 40.

3 Si recta AD angulum verticalem bisecet, illa basem (i) Per def.
etiam bifariam & perpendiculariter secabit. In triangulis 14.
enim BAD, CAD, propter latera BA, AD lateribus CA,
AD respectu æqualia, & angulos BAD, CAD illis lateribus
contentos, etiam æquales; (k) erit basis BD basi CD, æqua- (k) Per 4.
lis, & anguli ad D etiam æquales; ergo recta AD basem l. 1.
(l) bifariam & (m) perpendiculariter secat. (l) Per def.

4. Si in triangulo isoscelio ABC ducatur recta DE, quæ ba- 40.
sem BC bifariam & perpendiculariter secet in D; ea per (m) Per def.
trianguli verticem A transibit. Si enim super DE tanquam 14.
axe moveatur pars sinistra EDB trianguli ABC, donec par-
ti dextra EDC superimponatur; sibi mutuo (n) congruenti (n) Per axio.
æquales anguli recti ad D, æqualia latera DB, DC, & æquales 8.
anguli B, C. Coincident itaque latera BA, CA, itemque tota
triangula BAD, CAD, ac proinde latus DA lateribus BA,
CA in uno eodemque puncto A occurrit, hoc est, per ver-
ticem A trianguli ABC transit.

5. Si recta AD a trianguli ABC vertice A in basem BC cadens, eam secet bifariam & perpendiculariter; triangulum
- (a) Per def. 26. ABC erit isosceles, hoc est, crura AB, AC erunt (a) aequalia. In triangulis enim ADB, ADC, propter latera AD, DB lateribus AD, DC respective aequalia, angulosque ad D illis
- (b) Per def. 14. lateribus contentos rectos, ac proinde (b) aequales, erit etiam latus AB lateri AC (c) aequale.
- (c) Per 4. 6. Si recta AD trianguli ABC angulum A bifecans, sit lateri opposito BC perpendicularis; triangulum ABC est isosceles, cujus aequalia latera sunt AB, AC. Nam in triangulis ADB, ADC, propter angulos DAB, DAC aequales, angulos ad D rectos & proinde aequales, ac latus DC inter aequales angulos, (d) Per 26. l. 1. vel per 1. utriusque commune; erit (d) latus AB lateri AC aequale.]
- Schol. p. 4. l. 1.

PROPOSITIO XXVII.

- Fig. 50. SI duas rectas (AB, CF) parallelas secuerit recta (GO:) erunt 1. aequales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL.) 2. Externus (GLB) aequalis interno ad eandem partem (LOF,) (item GLR ipsi LOC.) 3. Duo ad eandem partem interni simul (ALO, COL) aequales duobus rectis. (item duo BLO, FOL duobus rectis aequales.)
- Fig. 51. 1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ.
- (e) Per axio. 11. Erunt (e) hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter se aequales. Aequales quoque (f) ex parallelis auferunt partes RL, QO. Ergo triangula
- (f) Per axio. 12. X, Z sibi mutuo æquilatera sunt. Ergo (g) anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppositi, sunt
- (g) Per 8. l. 1. æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alteros reliquos BLO, COL æquales esse. Nam quia tam
- (h) Per 13. l. 1. BLO, ALO quam COL, FOL æquantur (h) duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipsis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.
- (i) Per 15. l. 1. 2. Pars. GLB æquatur ad verticem (i) opposito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF; quod erat alterum. [Eodem modo probatur angulum externum GLR angulo interno ad eandem partem LOC æqualem esse.]
- (k) Per 13. l. 1. 3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL cum COL (k) facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos; quod erat tertium. [Et pari modo, duos angulos BLO, FOL duobus rectis aequales esse patebit.]

Coroll.

Coroll. Hinc, Eratosthenem imitati, Telluris ambitum metiri discimus. Ille enim observavit Solem Syene, urbi Ægyptiaca, ipso solstitii æstivi die perpendiculariter impendere: & eodem die gnomonis ope invenit Solem ab Alexandria, urbis etiam Ægyptiaca, sub eodem fere meridiano sitæ, vertice gradus fere septem cum quinta gradus parte distare: atque urbes istas stadia 5000 circiter distare novit. Unde vi præsentis propositionis ambitum terra hoc modo definiuit. Sit *A* Syene; *B* Alexandria, ubi gnomon *BC* erigitur horizonti perpendicularis; Sint *DA* & *EG* radii Solares sibi invicem quoad sensum paralleli; *DA* radius horizonti Syenensi perpendicularis, per *F* centrum terra transiens; *EG* vero radius horizonti Alexandrino obliquus, per gnomonis apicem transiens, & cum gnomone angulum *GCF* graduum $7\frac{1}{5}$ continens. Cum vero angulus *GCF* aqualis sit angulo alterno *AFB*, cujus mensura est arcus *AB* graduum $7\frac{1}{5}$; Telluris ambitum hac analogia adinvenit: Ut se habent gradus $7\frac{1}{5}$ ad stadia 5000; Ita integer circulus graduum 360 se habebit ad 250000; ambitum telluris iisdem stadiis definiendum.

Q. E. I.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas (*AB*, *CF*) secans recta (*GO*) al- Fig. 53.
ternos angulos (*ALO*, *FOL*) aequales fecerit,
erunt (*AB*, *CF*) parallele.

Si negas, sit ergo alia *XLZ* per punctum *L* ad *CF* parallela.

Ergo (a) angulus *XLO* par est alterno *FOL*; Quod fieri (a) Per præc. non potest, cum per hyp. *ALO* par sit eidem *FOL*.

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas (*AB*, *CF*) secans recta (*GO*) fe- Fig. 50, 51.
cerit externum angulum (*GLB*) aequalem opposito
interno (*LOF*,) vel duos ad easdem partes internos
ALO, *COL*) pares duobus rectis, erunt (*AB*, *CF*)
parallele.

Per 15. *GLB* æquatur *ALO* opposito ad verticem. Sed per hyp. *GLB* æquatur *LOF*. Ergo etiam *ALO* æquatur sibi alterno *LOF*. Ergo (b) *AB*, *CF* sunt parallele.

Deinde *COL* cum *FOL* facit duos rectos. Sed per hyp. (b) Per præced.
idem *COL* etiam cum *ALO* facit duos rectos. Ergo *ALO*, *FOL* alterni æquales sunt. Ergo rursus *AB* *CF* (c) sunt (c) Per præced.
parallele.

Corollarium.

EX secunda parte patet omne rectangulum esse parallelogrammum.

[Scholium. Tacquetus trium propositionum immediate præcedentium (viz. 27, 28, 29.) ordinem Euclidean immutavit. Quæ enim Euclidi est prop. 29. Tacqueto est 27. quia nempe prima istius propositionis pars (a qua partes due reliquæ dependent) e nova sua parallelarum definitione, novisque duabus axiomatibus, undecima & duodecima statim sequitur: quinetiam prop. 28. Tacquetiana, Euclidi est 27. quia ex Euclidea parallelarum definitione, ejusque axioma undecimo (quæ ambo rejicit Tacquetus) propositio illa demonstratur. Et proinde, prop. 29. Tacqueti, est Euclidis 28. Hac monenda duxi, ne forte, perlectis Tacqueti elementis Euclideanis, Tyrones aliorum libris mathematicis operam dantes, errorem aliquem causentur, quod Elementi primi propositiones 27, 28, 29. pro Tacquetianis 28, 29, 27. respectively, laudari viderint.]

PROPOSITIO XXX.

Fig. 50. **S**I due rectæ (AB , CF) sint parallelæ ad eandem rectam (DN), erunt inter se parallelæ.

Patet per se, & ex præcedentibus. Nam si omnes secentur a recta GO , erit (a) angulus externus GLB par interno LDN : est vero LDN externus respectu DOF , ac proinde (b) æqualis. Ergo etiam GLB par est LOF . Ergo AB , CF sunt (c) parallelæ.

(a) Per 27. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per præc.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 54. **P**ER datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (CF).

Ex A ducatur utcumque AL , secans datam FC . Ad punctum A fiat (d) angulus LAS par angulo ALF . Erit AS parallelæ ad CF , ut patet ex 28. cum alterni anguli SAL , FLA sint æquales.

(d) Per 23. l. 1.

Praxis: ducta AL , centro L describe arcum IQ , & centro A eodem intervallo arcum OX ; ex quo autem OB parem IQ . Per A & B ducta recta erit parallelæ.

Demon-

Demonstratio pendet ex 29. l. 3.

Aliter. Centro quopiam P describe circulum qui transeat Fig. 55. per datum punctum A, & secet datam CF in Q & O. Arcui QA accipe æqualem ON. Recta AN erit parallela.

Demonstratio pendet ex 29. lib. 3. & ex 28. hujus, [*habetur infra, in Lem. ad prop. 16. Theorematum select. ex Archimede.*]

Scholium.

Demonstrata jam igitur est parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides ejusque interpretes assumunt minus recte; cum non sit axioma, sed theorema, cujus veritas non magis per se appareat, quam ipsius 29. propositionis. Quia tamen deinceps sæpius adhibetur, id hoc loco jam facile ex præmissis demonstrabimus.

Theorema.

Si recta (MA) incidens in rectas (BC, AD) faciat angulos Fig. 56. internos ad easdem partes (BAD, ABC) duobus rectis minores, rectæ (BC, AD) concurrent versus eam partem, quam spectant anguli duobus rectis minores.

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis sunt minores; fiant CBA, XAB duobus rectis æquales, [*nempe faciendo angulum XAB*(a) *æqualem angulo MBC;*] Eruntque BC, AX (a) Per 23. (b) parallele, [*& angulus XAB*(c) *major angulo DAB, excessu* l. 1. XAD.] Assumo tanquam axioma per se notum, inter rectas (b) Per 29. AD, AX in infinitum productas duci posse aliquam ad AM l. 1. parallelam, puta ZX, quæ major sit quam AB. Accipiatur (c) Per def. 12. ipsi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX sunt parallele, erunt (d) alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem (d) Per 27. & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per constr. l. 1. Ergo etiam (e) anguli RZA, XAZ æquales sunt. Ergo RZ (e) Per 4. est (f) parallela ad AX. Sed etiam BC est parallela ad AX. l. 1. Ergo RZ & BC sunt (g) parallele. Est igitur BC & pa- (f) Per 28. rallela ad RZ, & incluta triangulo ARZ. Ergo cum pro- (g) Per 30. duci in infinitum possit, necessario occurreret aliquando rectæ l. 1. AZ. Nam neque evadere potest per sibi parallelam RZ, neque pertingere in A, alias duæ rectæ [*vel spatium comprehenderent, vel*] haberent commune segmentum, [*contra axiomata* 13. & 14.] Liqueat ergo propositum.

Demonstratio Clavii est a parallelis independens, sed prolixissima & multum operosa: Præli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam secans, etiam alteram sectura fit, si producat. Verum hoc per se notum non est, ob rationem datam def. 36.

Corollaria.

Fig. 56.

1. **H**inc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AD, [quas recta BA secet in B & A; & ad illam partem ipsius BA, ubi rectæ non parallelæ BC, AD convergunt ad se invicem, per punctum A,] duc (a) AX parallelam ad BC. Erunt anguli XAB, CBA duobus rectis (b) æquales. Ergo DAB, CBA sunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonstratum, BC, AD concurrent.

[2. Recta infinita AZ secans rectam AX, secabit quasvis infinitas BC, RZ ipsi AX parallelas. Cum enim ponantur (c) Per def. 36. AX, BC parallelæ, seu (c) æqualibus intervallis ubique distantes, secetque recta AZ, ipsam AX; ergo AZ, BC inequalibus intervallis distabunt, & proinde non erunt parallelæ. Quare (d) Per cor. 1. (d) AZ, BC concurrent. Et eodem modo demonstrabitur rectam AZ concurrere cum alia quavis RZ qua ipsi AX parallela ducitur.]

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 57.

Omnis trianguli externus quivis angulus (FBC) duobus internis oppositis (A & C) æqualis est.

(e) Per 31. Per B duc (e) BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC secat FA, erit externus angulus FBL interno A (f) æqualis. Et quia easdem parallelas BL, AC secat etiam recta BC, erit LBC sibi alterno C (g) æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique simul A & C. Quod erat demonstr.

Corollaria.

Fig. 57.

1. **E**xternus angulus (FBC) quolibet internorum oppositorum A vel C, major est. [Est prop. 16. Euclidis.]

Fig. 41.

2. Angulorum (C & AOB) eandem basim (AB) habentium, major est (AOB) qui intra cadit. [Est pars secunda prop. 21. cujus demonstrationem Tacquetus ad hunc locum rejecerat.]

Producatur enim AO in F. AOB per hanc major est quam OFB; & OFB per hanc eandem major est quam C: Ergo AOB multo major est quam C.

Fig. 58.

3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) oblique, perpendiculariter vero altera (AF;) hæc cadet versus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, si fieri potest, ad partes obtusi anguli AOC, puta

puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus respectu recti

(a) AQB, ac proinde illo major per coroll. 1. quod est absurdum. (a) Per hypoth.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres simul anguli, duobus rectis Fig. 59. sunt aequales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppositis A & C æqualis (b) est. Atqui (c) FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonstrandum. (b) Per 1. partem hujus. (c) Per 13. l. 1.

Aliter. [Per angulum 2] ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quam N, C æquales (d) sunt. Sed O, Q, N conficiunt (e) duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt: quod erat demonstrandum. (d) Per 27. l. 1. (e) Per Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. **T**res simul anguli cujuscvis trianguli [rectilinei] æquales sunt tribus simul cujuscunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus [aut recto major] est, reliqui sunt acuti. [Et angulus qui lateri non-maximo opponitur, semper (f) est acutus.]

6. Si in triangulo unus est rectus, reliqui duo simul etiam unum rectum conficiunt. (f) per hoc cor. & pr. 18. prius.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus est.

8. Cum scitur quot graduum sit unus angulus, scitur etiam quot gradus faciant duo reliqui simul. Et cum scitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum summa, scitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul, æquales sunt duobus angulis aut singulis aut simul in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit. [Ex hoc corollario, quod a prop. 26. non dependet; demonstratur ejusdem propositionis 26. pars secunda, ut ibi notat Tacquetus. Huc igitur ista propositio referenda est.]

10. Cum duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum summæ æquantur.

11. Cum

11. Cum in Isoscele angulus æquis cruribus contentus est rectus, reliqui ad basim sunt (a) semirecti. Et Isoscelis ad basim anguli semper sunt acuti. [Et ab Isoscelis vertice, perpendicularis in basim, (b) cadit intra triangulum.]

(a) Per cor. 6. hujus, & p. 5. l. 1.

(b) Per Cor. 3. hujus.

(c) Per hanc & cor. p. 5. l. 1.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem (c) duorum rectorum. Ergo duas tertias unius. [Cum enim duo recti faciant gradus 180, erit tertia pars duorum rectorum, sive trianguli æquilateri angulus, graduum 60, & proinde continebit duas tertias anguli recti, sive graduum 90.]

Fig. 61.

Fig. 58.

(d) Per 19. l. 1.

l. 1.

Fig. 62.

(e) Per hanc prop.

Fig. 13.

(f) Per 18. l. 1.

Fig. 63.

13. Hinc anguli recti (BAC) facillima trisectio; si super AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum FAC sint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

14. Perpendicularis (AF) est brevissima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci possunt. Quoniam enim angulus F rectus est, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo (d) AF minor quam AO quælibet.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantum una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

16. Hinc etiam ex prima parte hujus propositionis astrorum parallaxin sive loci veri atque visi differentiam definire discimus. Sit A Telluris centrum; B Locus Observatoris in ejusdem superficie. Sit DBC angulus astri C à vertice per observationem notus, sive distantia angularis astri à vertice visa: Est vero Angulus DAC distantia angularis vera. Trianguli autem ABC angulus externus observatione datus DBC, angulis duobus internis oppositis (e) BAC & BCA æqualis est; Atque adeo angulus BCA est angulorum DBC & DAC differentia. Si itaque angulus A, computatione notus, ex angulo DBC, observatione noto subducatur, differentia angulorum istorum BCA, quam Parallaxin dicimus, pariter innotescet. Q. E. I.

[17. Liquet etiam e secunda parte hujus prop. Trianguli cujuscunque duos quosvis angulos duobus rectis minores esse; que est prop. 17. Euclidis a Tacqueto omissa.]

18. In triangulo rectangulo scaleno, ille ex angulis acutis, qui laterum angulum rectum comprehendentium majori opponitur, est semirecto major, & qui opponitur minori est semirecto minor. Acuti enim anguli simul sumpti, per cor. 6. hujus, angulum rectum conficiunt: Ergo ille qui majori lateri opponitur est (f) semirecto major; qui minori, semirecto minor.]

19. Hinc turris aut puncti cujuscunque elevati altitudinem, umbra solaris ope, metiri licet. Ubi enim Sol gradus 45. supra horizontem elevatur, erunt turrium umbra in horizontem projecta, earum altitudini exacte æquales. Ob angulum

Liber Primus.

31

enim ABC rectum, & ACB (a) semirectum; erit angulus BAC (a) Per Schol. semirectus, per cor. 6. hujus. Et cum anguli ad basim AC post p. 23. l. sint aequales, latera AB , BC aequalia (b) erunt. Data itaque^{1.} mensurando recta BC , datur etiam AB turris altitudo supra^{(b) Per 6. l. 1.} horizontem.

20. Hinc lineam inaccessam AB metiri licet. Triangulum Fig. 64. enim aequilaterum quodcunque BDE , puncto suo B ac latere BD , ad lineam inaccessam BA punctum B secundum eandem BA supponatur adjectum: & a puncto B per latus BE , tanquam dioptram, puncta quacunque in recta BC posita observentur. Removeatur demum triangulum BDE secundum rectam BC hac illac, donec collimando per latus trianguli ED ~~fit~~ *five* CF , punctum A inaccessum, in eadem linea CF producta, positum cernatur; & linea accessibilis BC , linea inaccessa AB equalis erit. In triangulis enim ABC , DEB , propter angulum B communem, & angulos C , E aequales, (c) erunt etiam anguli (c) Per cor. A , D aequales. Sed triangulum BDE ex hypothesi est aequilaterum, & proinde (d) equiangulum: Ergo etiam triangulum (d) Per cor. BAC est equiangulum, & proinde (e) aequilaterum. Si itaque p. 5. l. 1. lineam accessibilem BC metiamur, linea etiam inaccessa BA (e) Per cor. mensuram habemus. p. 6. l. 1.

Scholium.

Hujus pulcherrimi, fecundissimique theorematidis, cujus per Mathesim universam usus prope immensus, inventor est Pythagoras teste Eudemo veteri Geometra. Frequentissime ejusdem meminit Aristoteles, qui illud etiam exemplum statuit perfectissimae demonstrationis. Sed quemadmodum ex hac propositione jam didicimus, quot rectis angulis, figurae trilaterae anguli aequivaleant, ita ejusdem beneficio cujuslibet figurae rectilineae sive interni, sive externi anguli, quot rectos conficiant, praclare innotescet tribus sequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Omnis quadranguli quatuor simul anguli efficiunt quatuor Fig. 65. rectos.

Nam si per oppositos angulos ducas rectam BF , haec quadrangulum in duo triangula secabit, quorum anguli simul conficiunt (f) rectos quatuor.

(f) Per 34. l. 1.

Theorema 2.

Omnes simul anguli cujuscunque figurae rectilineae con- Fig. 66. ficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figurae.

Ex

Ex quovis puncto *A* intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ secabunt figuram in tot triangula (a) *Per 32.* la quot habet latera. Quare cum singula triangula (a) conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa punctum *A*, (b) conficiunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa *A*, anguli reliqui, qui component angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

(a) *Per 32.*
L. 1.

(b) *Coroll.*

3. p. 13. l.
2.

Hinc patet omnes ejusdem speciei rectilineas figuras æquales habere angulorum summas; Quod admiratione dignum est.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4. restabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 67.

OMnes simul externi anguli cujuscumque figuræ rectilinearæ, conficiunt quatuor rectos.

(c) *Per 23.*
L. 2.

Nam singuli figuræ interni anguli, cum singulis externis, conficiunt duos (c) rectos. Ergo interni simul omnes, cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Sed (ut in præced. ostendimus) interni simul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.

Mira sane hæc figurarum rectilinearum proprietas est: ex qua illud etiam consequitur, omnes cujuscumque speciei rectilineas figuras, æquales habere externorum angulorum summas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales sunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorsus admiratione sunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 68.

SI duas rectas æquales & parallelas (*AB*, *CF*) jungant duæ aliæ (*AC*, *BF*;) erunt etiam illæ æquales & parallele.

Parallelas *AB*, *CF* secet *AF*. Erunt in triangulis *Q*, *R* alterni anguli *BAF*, *CFA* (d) æquales. Ponitur autem latus *AB* æquale lateri *CF*, & *AF* utrique triangulo est commune. Ergo (e) bases *BF*, *AC* æquantur; (quod erat primum.) Et anguli ad basim *AFB*, *FAC* sunt æquales: ac

(d) *Per 27.*
L. 1.

(e) *Per 4.*
L. 2.

proinde

proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC æquales. Ergo (a) AC, BF sunt etiam parallelæ. (a) Per 26. Quod erat alterum. l. 1.

[Scholium. Si duas rectas parallelas & inæquales (AB, Fig. 79. OC) jungant dua alia (AO, BC;) concurrent tandem ista jungentes, si ultra parallelarum minorem (OC) satis producantur. Si enim a parallelarum majori BA, capiatur (b) BR (b) Per 3. minori equalis, & jungatur RO; erunt RO, BC (c) parallelæ, l. 1. & anguli ad eandem partem interni, B, ORB simul sumpti, duobus rectis (d) æquales. Sed trianguli ORA externus angulus ORB, uno internorum oppositorum OAR (e) major est, & proinde anguli B, OAB simul sumpti, sunt duobus rectis minores, adeoque rectæ AO, BC ultra OC productæ, tandem (f) concurrent. Q. E. D.] (c) Per 33. l. 1. (d) Per 27. l. 1. (e) Per cor. l. 1. pr. 32. l. 1. (f) Per Schol. post pr. 31. l. 1.

PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammi opposita latera & anguli æquantur, ipsumque a diametro bisecatur. Fig. 68.

Quoniam AB, CF sunt (g) parallelæ, in easque incidit AF, erunt alterni BAF, CFA (h) æquales. Item quia AC, BF sunt (i) parallelæ, in easque incidit AF, erunt (k) alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis est. Eodem modo ostendam B & C æquales esse. Quod erat primum. (g) Per def. 35. (h) Per 27. l. 1. (i) Per def. 35. (k) Per 27. l. 1.

Quia vero jam ostendi triangula Q, R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipsi CFA, & CAF ipsi BFA; erunt (l) etiam latera AB ipsi FC, & BF ipsi CA, æqualia, itemque ipsa triangula. (l) Per 26. l. 1.

[Cor. 1. Omne parallelogrammum, ut ACEF, quod unum angulum A rectum habet, erit rectangulum, hoc est, habebit omnes angulos rectos. Nam quia rectas parallelas AF, CE secat recta CA, efficiet angulos A, C, internos ad eandem partem, duobus rectis (m) æquales: Cum vero A sit angulus rectus, etiam C rectus erit: Unde per hanc prop. anguli E, F, angulis A, C respective oppositi, erunt quoque recti.] + 4 Vid. Enat. (m) Per 27. l. 1.

Cor. 2. Hinc Montium tam altitudines supra horizontem, quam lineas horizontales metiri discimus. Sit ABC latus montis, cui applica ingentem normam, aut quod norma instar est, ADB, ea ratione, ut latus AD sit horizonti parallelum, & latus DB horizonti perpendicularare; & (n) completo parallelogrammo DH, erit (per hanc prop.) latus AD l. 1. æquale (n) Per 31. l. 1.

(a) Per 30. l. 1. *aquale recta HB, ipsi AD & horizonti (a) parallela; & DB aquale recta AH, eidem DB, ut & horizonti perpendiculari. Applica deinde inferius a puncto B ad punctum C; & completis parallelogrammis EF, BG, erit itidem recta EB aequalis CF, & EC aequalis BF sive HG, prout & BH sive DA aequatur ipsi FG: atque ita porro. Latera horizonti parallela AD, BE, &c. simul addita, dabunt lineam horizontalem GC: & latera perpendicularia BD, EC, &c. simul addita dabunt altitudinem AG.*

Fig. 63. Cor. 3. Hinc etiam ope quadrantis Astronomici, Turris altitudinem AB invenire licet. Ubi enim elevationis angulus in quadrante est semirectus observatori ad E, fiat DE horizonti perpendicularis, & aequalis oculi observatoris altitudini, & ab oculo D (b) ducatur DE ipsi EB parallela, eritque BD parallelogrammum (c) rectangulum, & latus FB lateri DE, sive altitudini observatoris oculi (d) aequale, latus autem DE (e) Per 27. l. 1. *aquale lateri EB, sive distantia observatoris a turre. Sed in triangulo AFD, propter angulum AFD (e) rectum, & angulum elevationis ADF (f) semirectum, erit & angulus A (g) semirectus, & linea DF, seu distantia observatoris a turre, (h) aequalis linea FA, seu altitudini turris supra observatoris oculum; cui si adjiciatur FB altitudo oculi, habebitur integra turris altitudo AB.*

Fig. 70. Cor. 4. Hinc denique Geodetae agri parallelogrammi aream facilius dividunt. Sit enim ABDC ager parallelogrammus; AD ejusdem diameter, sive linea diagonalis; cujus punctum medium signet (i) F. Quaecunque linea recta, ut EG, per punctum F transsit, agrum in partes aequales EACG, EBDG dividit. Triangulum enim ABD per hanc prop. aequale est (k) Per 26. l. 1. *triangulo ACD; & Triangulum AEF aequale (k) Triangulo GFD (propter aequales (l) angulos alternos FAE, FDG; item (l) Per 27. l. 1. *que aequales angulos ad verticem (m) oppositos AFE, DFG; & latera FA, FD, quae inter aequales angulos existunt, etiam aequalia.) Si itaque trapezio EBDF, loco trianguli AEF, triangulum eidem aequale GFD addas, area quantitatem non mutabis: sed erit trapezium EBDG aequale triangulo ABD, sive dimidio parallelogrammo, & proinde trapezio AEGC aequale. Q. E. D.**

Scholium.

Fig. 71.

Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. praemittenda, facile elicitur dimensio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguum AF, AC. Sit, ex. gr. AF pedum

dum 8. AC. 4. Duc 8 in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli.

Quadrati vero area habetur ex uno latere FI per se *Fig. 72.* ipsum multiplicato: ut si latus FI sit 5. pedum; duc 5. in se, proveniunt 25. pedes quadrati pro area quadrati.

Demonstratio ex hac prop. patet, ductis per laterum divisiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma super basi eadem (AB) vel *Fig. 73.* quali, & inter easdem parallelas (CQ, AX) constituta, sunt æqualia.

Quia AL, BQ (a) sunt parallelæ, easque secat CQ; erit (a) *Per def.* (b) externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF ^{35.} quam LQ æquantur (c) eidem AB, erunt CF, LQ æquales. (b) *Per 27.* Adde utrisque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Insuper (c) *Per 34.* & AL, BQ (d) æquales sunt. Triangula igitur CLA, FQB ^{l. 1.} æqualia (e) sunt. Ergo ablato communi FOL, plana FOAC, (d) *Per eand.* QBOL remanent æqualia. Quibus utrisque adde planum (e) *Per 4. l. 1.* AOB, & fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib. 6. Observent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter easdem parallelas sine fine productas, in infinitam longitudinem extendantur ex eadem basi AB, semper tamen manere æqualia ex vi demonstrationis jam datæ.

[Coroll. Unde sequitur duæ urbes parallelogrammas magnitudine æquales, in circuitu tantum discrepare posse, ut unius ambitus centies vel millies alterius ambitum exuperet. Si nimirum altera sit quadrata vel rectangula; altera vero super eadem cum priore basi, & intra easdem cum priore parallelas, parallelogramma quidem, sed admodum obliquangula, & proinde in longum protensa. Sequitur porro isoperimétras figuras, areas immane quantum diversas continere posse.]

Scholium.

EX hoc theoremate habetur dimensio parallelogrammi *Fig. 73.* cujuscunque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX seu CA ducta in basim AB.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis (f) (f) *Per præc.* sit (g) ex AC ducta in AB. Ergo, &c. (g) *Per Schol.*

PRO. p. 34. l. 1.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 74. **T**riangula (ACB , AFB) super basi eadem (AB) vel aequali, & inter easdem parallelas (CL , AZ) constituta, sunt aequalia.

Lateribus AC , AF duc parallelas BL , BI . Parallelogramma $ACLB$, $AFIB$ sunt (a) aequalia. Sed horum, triangula data (b) sunt dimidia. Ergo triangula data (c) sunt aequalia.

(a) Per præced.

(b) Per 34. l. 1.

(c) Per axio. 6.

Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare iussimus præced. de parallelogrammis.

Fig. 75.

(d) Per 10. l. 1.

Coroll. Hinc etiam Geodata agri triangularis aream facillime dividunt. Sit e.g. ABC ager triangularis, & sit basis BC bisecta (d) in D ; recta DA agrum bifariam dividet. Triangula enim ABD , ACD quæ bases habent æquales BD , CD , & communem verticem A , ac proinde inter easdem parallelas constituuntur, erunt aequalia per hanc prop.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig. 76. **T**riangula aequalia (ACB , AFB) super eadem basi (AB) vel aequali, ad easdem partes constituta, sunt inter easdem parallelas (AB , CF .)

Si negas, sit CL parallela ad AB , & ducatur BL . Igitur (e) ALB æquatur (e) ACB . Sed ex hyp. etiam AFB ipsi ACB æquale est. Ergo ALB & AFB aequalia sunt, pars & totum. Quod fieri non potest. Igitur, &c.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 77. **S**i triangulum (AFB) sit in iisdem parallelis cum parallelogrammo (AL) & basim eandem habeat (AB) vel æqualem, ipsius dimidium erit.

(t) Per 37.

& 38. l. 1.

(g) Per 34.

l. 1.

Duc CB . Triangula AFB , & ACB (f) æquantur. Sed (g) ACB est dimidium parallelogrammi AL . Ergo etiam AFB est dimidium AL . Quod erat demonstrandum.

Scholium

Scholium.

EX hac & scholio prop. 35. discimus, aream trianguli *Fig. 77.* (AFB) cujuscunque produci ex dimidia altitudine FI ducta in basim (AB) vel ex dimidia basi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, sive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo opposito ducitur, habetur trianguli dimensio; ut si basis AB sit pedum 100. altitudo FI, 85. multiplica basis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro area trianguli AFB. Porro altitudo sive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari potest, Mechanice innotescit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenitur Geometrice altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in scholio ibidem docebimus.

In triangulo rectangulo, altitudo est eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo semissis ducta in latus alterum recto adjacens, dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere, habens angulum parem dato (O.) *Fig. 78.*

Basim AB biseca in F. Per C duc (a) CX parallelam AB. Fac (b) angulum BAL parem dato O. Duc (c) FI parallelam AL. Erit ALIF quod quæritur. *(a) Per 31. l. 1. (b) 23. l. 1. (c) Per 31.*

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O; & est æquale triangulo dato ACB, cum tam (d) triangulum ACB, quam (e) parallelogrammum AI, dupla sint ejusdem trianguli AIF. *(d) Per 38. l. 1. (e) Per 38. l. 1.*

Corollarium.

Dato triangulo ACB habetur æquale rectangulum, si per C ducatur parallela lateri AB, & bisecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum sub FB & QB par triangulo ACB. *Fig. 78.*

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL) complementa (BO, OL) eorum quæ circa diametrum existunt (RF & CS) sunt aequalia. *Fig. 79.*

¶

¶

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ; secatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum sunt RF, CS; duo reliqua BO, OL, sunt horum complementa.

- (a) *Per 34.* Ea esse æqualia sic ostenditur. Triangula ABQ, ALQ
L. 1. (a) æquantur: similiter ARO, OCQ (b) æquantur AFO, OSQ. Ergo si ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ, æqualia remanent BO & OL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 80.

AD datam rectam (OS) parallelogrammum constituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)

- (c) *Per 42.* Fac (c) parallelogrammum RC dato V æquale, habens
L. 1. angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc SQ (d) parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat BR protracta in A. Per A duc AL parallelam ad OS, cui occurrant CO & QS producta in F & L. Parallelogrammum OL est quod petitur.
 (e) *Per prac.* Nam OL (e) æquatur RC, hoc est per constructionem,
 (f) *Per 15.* dato triangulo V; & est addatam OS; habetque angulum (f)
L. 1. FOS parem angulo ROC, hoc est per const. parem dato X.
 [Coroll. Hinc liquet, quomodo ad datam rectam OS, parallelogrammo BO æquale & æquiangulum parallelogrammum OL constituere oportet.]

Fig. 81.

Scholium. Continet hæc propositio cum corollario annexo, Geometricam quandam divisionem. Sicut enim numerus multiplicatione productus, tamquam rectangulum quoddam jure considerari potest, cujus factores sint duo quævis rectanguli latera contigua, prout in Scholio post prop. 34. declaratum est: Sic etiam eodem jure, numeri dividendi locum, rectangulum occupare censebitur, cujus latera circa angulum quemvis, divisorem & quotum representabunt. Et sicut unus idemque numerus dividendus varios admittit divisores, quibus singulis suus exoritur numerus quotus; sic una eademque area rectangula quantitate data, recta cuiusvis tamquam lateri applicari potest, cui ad rectos angulos aptabitur quædam alia recta, pro altero rectanguli latere. In fig. 81. sit rectangulum AB, duodecim pedes quadratos complexum, cu-

jus

ius latera sint AC trium, & AE quatuor pedum, & proponatur idem quantitate rectangulum lateribipedali tamquam divisori ita applicare, ut inde exsurgat latus aliud, quod quotientis instar sit habendum. In recta AE producta, capiatur linea bipedalis EH , ad quam, per coroll. preced. constituatur rectangulum EG ipsi AB æquale, & prodibit alterum rectanguli latus EI sex pedes longum, pro quoto quasi-to. Cum vero, (propter parallelogramma BH , AI) recta BD , AF , rectis EH , EI respective sint (a) æquales, pro praxi satis erit, si in CB producta accipiat BD pedum duorum, & l. 1. per puncta D , E ducatur recta DE , quæ producta occurrat (b) recta CA producta in F . Recta enim AF ea erit quam (b) Per cor. quarimus. Hac quidem divisionis species Applicatio dicitur; i. Sch. p. 31. quoniam spatium rectangulum AB (hoc est, ei æquale EG) l. 1. linea BD sive EH applicatur. Et inde fit quod Divisio haud raro Applicatio nominatur: scilicet pro antiquorum Geometrarum consuetudine; qui constructionis Geometricæ, quæ regula & circino solis utitur, quam computi Arithmetici per numeros solos perficiendi potiore rationem semper habuerunt.

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo (CBA) æquale parallelogram- Fig. 82.
mum construere ad datam rectam (IQ) &
in dato angulo (H .)

Rectilineum resolve in triacula A , B , C , ducendo rectas FL , FI .

Ad datam IQ in angulo dato H , fac (c) parallelogram- (c) Per 44.
mum IV æquale triangulo A . Tum producat IR infinite l. 1.
versus P , & ad rectam RV , in angulo VRP fac (d) paral- (d) Per eand.
lelogrammum RZ æquale trigono B . Rursum ad rectam
 SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG æquale tri-
gono C . IG est parallelogrammum quæsitum.

Nam (e) angulus ZVR par est sibi alterno IRV . Sed (e) Per 27.
(f) QVR & IRV sunt æquales duobus rectis. Ergo etiam l. 1.
 QVR & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo (g) QV & (f) Per eand.
 ZV sunt in directum. Pari modo ostendam QZ & GZ (g) Per 14.
esse in directum. Ergo tota $QVZG$ est una recta, & qui- l. 1.
dem parallela ad IX , cum per const. QV sit ad IP parallela. (h) Per 30.
Est vero etiam (h) XG parallela ad IQ , cum XG sit paral- l. 1.
lela ad SZ , & SZ ipsi RV , & RV ipsi IQ . Ergo (i) (i) Per de-
 IG est parallelogrammum: esse autem quale petitur, patet fin. 35.
ex constructione.

[Scholium. Porro, ex hac ipsa propositione haud obscurum est, quomodo parallelogrammum in angulo dato construere oportet duorum pluriumve rectilineorum summa aequale.

Corollarium. Hinc facile invenitur excessus quo rectilineum aliquod majus superat rectilineum minus: Nimirum si ad eandem rectam $I Q$ in eodem angulo QIP applicentur ad eandem partem parallelogramma duo, rectilineis datis respective aequalia. Parallelogrammum enim quo majus excedit minus, dabit rectilineorum differentiam. Q E. I.]

Scholium.

A Djungo problema utile futurum ad praxim propositionis 14. lib. 2.

Fig. 83.

Dato quadrangulo BF, rectangulum æquale describere.

Resolve in triacula per rectam AC. Ex oppositis angulis demitte perpendiculares BO, FI. Biseca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum sub LS & SA æquatur dato BF. Demonstratio patet ex prop. 41. ejusque Scholio; [*et in Coroll. post prop. 1. l. 2. latius deducetur.*]

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 84.

A Data recta (AB) quadratum describere.

(a) Per constr.

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge C, E. Dico factum.

(b) Per 29. l. 1.

Cum enim anguli A & B duo sint (a) recti, erunt (b) AC,

(c) Per constr.

BE parallelæ: sunt vero etiam (c) æquales. Ergo (d) CE,

(d) Per 33. l. 1.

AB sunt parallelæ & æquales. Ergo figura est parallelogram-

(e) Per 34. l. 1.

ma, & æquilatera: anguli quoque omnes sunt recti: (cum enim A & B sint recti, etiam recti erunt (e) oppositi, E &

Fig. 73.

C.) Ergo figura AE, est quadratum.

[Scholium. Eodem fere modo facile describes rectangulum ACQX quod sub datis duobus rectis BF AX contineatur; si nempe ad puncta A, X super data recta AX erigantur perpendiculares AC, XQ data BF æquales, & ducatur CQ.]

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (ABC) rectangulo, quadra- Fig. 85.
tum lateris (AC) quod recto angulo opponitur,
equale est duobus simul reliquorum laterum (AB ,
 CB) quadratis.

Ducantur IC , BF , & BE parallela AF . Si angulis IAB ,
 FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis BAC ,
erunt toti IAC , FAB æquales. Sunt vero in triangulis IAC ,
 FAB , etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter
se (a) æqualia, nempe, IA , CA , ipsis BA , FA , alterum alteri. (a) Per de-
Ergo triacula IAC , FAB (b) æquantur: Quæ, quia fin. quadra-
cum parallelogrammis $ABLI$ & $ZAFE$ consistunt in iisdem ti.
basibus IA , FA , & in iisdem parallelis IA , LBC , & AF , (b) Per 4.
 EZB sunt (c) eorum dimidia. Ergo parallelogramma $ABLI$, l. 1.
 $ZAFE$, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se. Eo- (c) Per 41.
dem discursu ductis rectis AX , BR ostendam parallelogram- l. 1.
ma, EC , BX æqualia esse. Totum igitur AR utrisque IB
& BX æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Assumptum fuit LBC esse parallelam IA , adeoque LB ,
 BC esse unam rectam. Id vero patet ex 14. cum anguli
 LBA & CBA ambo recti sint per hypothesim.

[Cor. 1. Si triangulum rectangulum ABC habeat latera Fig. 86.
circa angulum rectum B æqualia; erit quadratum lateris AC
angulo recto oppositi, duplum quadrati lateris AB vel BC an- (d) Per axio.
gulo recto adjacentis. Aequale est enim quadratum lateris 15.
 AC quadratis (d) æqualibus ABq , BCq simul (e) sumptis, ac (e) Per hanc
proinde erit unius duplum. prop.

Cor. 2. Si a trianguli cujuscunque ABC angulo A demit- Fig. 87.
tatur in basim (si opus productam) perpendicularis AD ; erit
differentia quadratorum lateris unius AB & segmenti contermi-
ni BD , æqualis differentia quadratorum lateris alterius AC &
segmenti illi lateri contermini DC . Nam propter angulos ad D (f) Per def.
(f) rectos, erit in triangulo ABD , $ABq = (g) ADq + BDq$, 14.
& sublato utrinque BDq , erit $ABq - BDq = (h) ADq$: & (g) Per hanc
eodem modo in triangulo ADC ostendi potest, quod $ACq - prop.$
 $DCq = ADq$. Ergo per axio. 1. erit $ABq - BDq = ACq - (h) Per axio$
 DCq . 2. E. D. 3.

Cor. 3. In triangulo ABC , demissa eadem perpendiculari Fig. 87.
 AD , id erit baseos BC segmentum majus, quod lateri majori
 AC adjacet, atque illud minus, quod minori AB . Nam propter (i) Ex hypo-
latus AC majus (i) quam AB , erit ACq majus (k) quam ABq . (k) Per axio

- (a) Per hanc Sed $ACq = ADq + DCq$, & $ABq = ADq + DBq$. Erga
 prop. summa quadratorum ADq, DCq major quam est summa qua-
 (b) Per axio. dratorum ADq, DBq . Quare ablato communi ADq , (b)
 5. erit DCq majus quam DBq , atque adeo segmentum DC seg-
 (c) Per axio. mento BD majus (c) erit.
 16.

Fig. 48.

- Cor. 4. Si in triangulo ABE , quadratum lateris BE majus
 fuerit quadratis laterum AB, AE simul sumptis, angulus
 (d) Per 11. BAE lateri BE oppositus erit recto major. Erigatur (d) enim,
 l. 1. super recta AB , ad punctum A , perpendicularis AF aequalis
 lateri AE , & ducatur BF . Ob angulum BAF rectum, erit
 (e) Per hanc (e) quadratum lateris BF aequale quadratis laterum BA, FA
 prop. simul sumptis, hoc est, propter aequales FA, AE , quadratum
 (f) Per axio. BF (f) aequabitur quadratis BA, AE simul sumptis. Sed ex
 15. hypothesi, quadratum BE majus est quadratis BA, AE simul
 sumptis: Ergo quadratum BE majus est quadrato BF , &
 (g) Per axio. recta BE (g) est recta BF major; & proinde angulus BAE
 16. (h) est angulo recto BAF major. Q. E. D.
 (h) Per 25.
 l. 1.

- Cor. 5. Eodem modo, si in triangulo ABC , quadratum
 lateris BC angulo BAC oppositi sit minus quadratis laterum
 BA, AC simul sumptis, demonstrabitur angulum BAC esse
 angulo recto minorem. Erecta enim ad latus AB perpendicu-
 (i) Per hanc lari AF ipsi AC aequali, & ducta BF , erit $BFq = (i) ABq +$
 prop. AFq . Sed $AFq = (k) ACq$. Ergo $BFq = ABq + ACq$. Sed
 (k) Per con- per hypothesim, BCq minus est quam $ABq + ACq$. Ergo BCq
 str. & axio. minus est quam BFq , & proinde BC minor (l) quam BF ; unde
 15. etiam angulus BAC angulo recto BAF minor (m) erit.
 (l) Per axio.
 16.
 (m) Per 25.
 l. 1.

Scholium.

HOC theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad
 omnes figuras similes extendet) Pythagoricum ap-
 pellatur passim ab inventore Pythagora; qui, ut testantur
 Proclus, Vitruvius alique, Musis victimas immolavit, quod
 se in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Igno-
 rabat videlicet scientiarum Dominum, verum & unicum
 omnis sapientiæ auctorem Deum; aut certe si cognovit,
 non sicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theo-
 rematis & eximius per Mathematicam totam usus est; ac
 viam imprimis ad incommensurabiles magnitudines, arca-
 num ingens Geometricæ Philosophiæ, cognoscendas aperit.

Quadrati latus esse diametro incommensurabile, theorema
 celebratissimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem
 præsertim & Platonem, adeo ut qui hoc nesciret, eum Plato
 non hominem esse, sed pecudem diceret. Notitia porro
 hujus

hujus mysterii duxisse videtur originem ex hac prop. 47. Fig. 84.
 Nam cum in quadrato angulus A rectus sit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde (a) duplum unius. Quare cum quadratum diametri CB sit 2. & quadratum lateris AB sit unitas, erit diameter CB radix quadratica numeri binarii, & latus AB radix quadratica unitatis, five ipsa unitas, quarum proportio (ut suo loco demonstrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommensurabiles sunt. [Hæc propositio de incommensurabilitate lateris & diametri in Quadrato, est ultima libri decimi apud Euclidem: demonstratur autem a Tacqueto in Elementis suis Arithmet. in Scholio post prop. 11. lib. 2.]

Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deficerent, evidentissime conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse: alias enim nullæ essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

His subjungo tria problemata ex eadem propositione deducta, quorum usus frequentior.

Problema 1.

D Atis quocunque quadratis, unum omnibus æquale construere. Fig. 88.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, & junge AC. Erit AC quadratum æquale (b) quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X; & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale (c) quadratis ex EB (seu EC) & ex BX; hoc est, æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE.

Problema 2.

D Atis duabus rectis inæqualibus (AB, BC,) exhibere quadratum, quo quadratum majoris (AB) excedit quadratum minoris (BC.) Fig. 89.

Centro B, intervallo BA describe circulum. [& in diametro AF, a centro B versus F, pone BC.] Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriæ in E. Quadratum ex CE est excessus quæsitus.

Ducatur enim BE. Quadratum BE, hoc est AB, æquatur (d) quadrato BC & quadrato CE. Ergo &c.

Problema 3.

Fig. 90.

NOtis duobus quibuscunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia sint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum sit CB, angulo recto oppositum. Duc 6. & 8. in se ipsa; orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum summa est 100. Radix quadratica 100. nempe 10. dat pedes lateris BC quæsit. Demonstr. patet ex 47. Nam summa quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum summæ radix eadem est cum radice seu latere BC.

Nota sint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC. Residuum 64. erit quadratum lateris AC. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris AC.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 91.

SI quadratum ab uno trianguli latere (AB) descriptum, sit æquale duobus reliquorum laterum (AC, BC) quadratis; angulus (ACB) quem reliqua latera continent, rectus erit.

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonstrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypothesim.

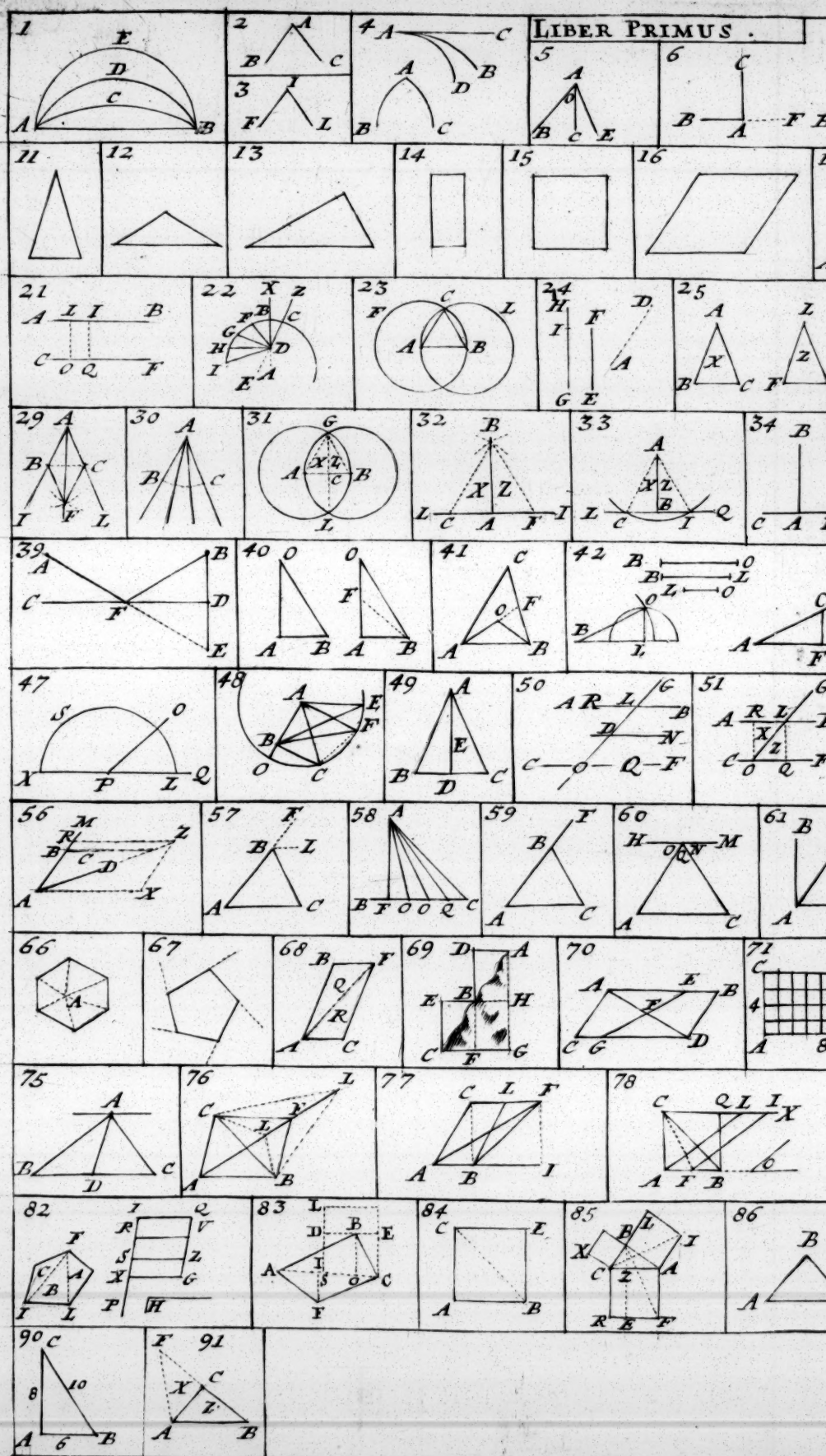
Vel sic. Duc FC perpendicularem ad AC, & æqualem

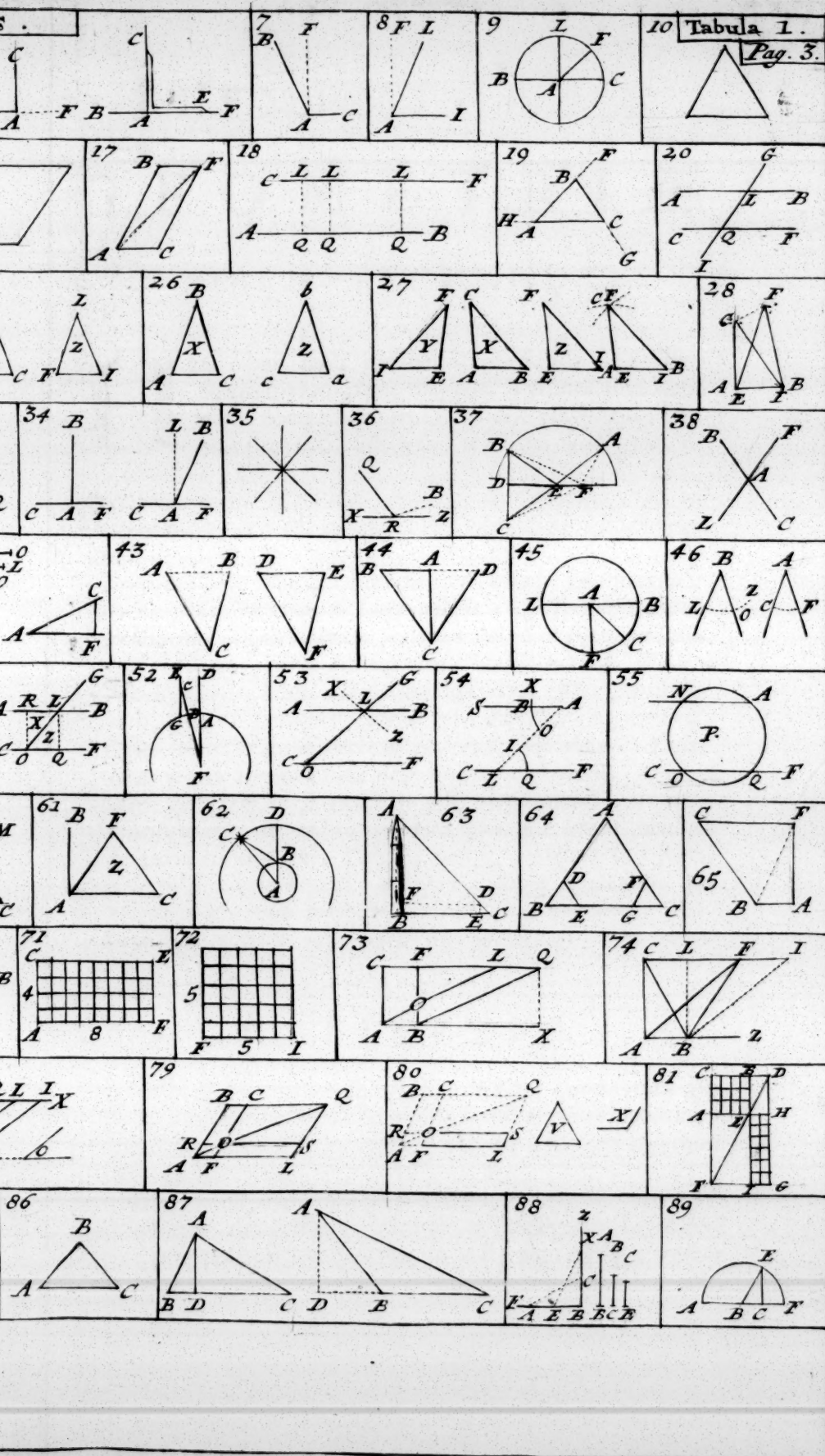
- (a) Per 47. CB, & junge AF. Quadratum AF æquale est (a) quadratis FC, CA; hoc est (b) quadratis BC, CA; hoc est per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales (c) sunt. Quoniam igitur trigona X, Z, sunt sibi mutuo æquilatera, anguli ad C (d) sunt æquales. Ergo (e) recti. Quod erat demonstrandum.

l. 1.

(e) Per def.

24.





ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER SECUNDUS.

HIC liber mole parvus, at præstantia ac utilitate theorematum plane magnus. Tyrones, scio quod dico, nondum capient; sed esse verissimum ulterius provec̃ti, usu ipso certissime intelligent.

TRactat autem Hic Liber secundus de Rectarum linearum potentiis; hoc est quadratis. Comparatque Rectangula varia, e rectarum aut bifariam aut utcunque divisarum partibus oriunda cum totarum linearum rectangulis & quadratis. Pars hæc sane elementorum longe utilissima est: speciatim autem Operationum Algebraicarum præcipuarum vere fundamentum. Propositiones tres priores demonstranda Multiplicationi, Quarta radicum quadricarum extractioni inservit. Quæ sequuntur quinta, sexta, septima, octava Operationibus Algebraicis; Reliqua vero Trigonometricis conferunt plurimum. Prima quidem fronte Tyronibus hic liber videtur difficillimus; eo quod mysterii quiddam in se continere sibi imaginentur. Attamen Demonstrationes in eodem adhibita pleraque omnes facillimo huic axiomati nituntur, Totum, nempe, omnibus suis partibus simul sumptis æquari. Ne vero animum despondeant Tyrones, si prima vice perfecte nequeant comprehendere. Inter relegendum enim se tam clara non intellexisse olim mirantur.

DEFINITIO.

Parallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum simpliciter sine ullo addito appellari solet) contineri dicitur sub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. Fig. 71. l. 2.

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde si intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam AC,

AC, producet eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, seu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. l. 2. Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum sub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis causa, rectangulum ACB, designatur rectangulum quod continetur sub AC & CB [vel sub rectis, quæ ipsis AC, CB respectivé sunt æquales] ad rectum angulum constitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum sub AB, CB, vel rectangulum ABC, designatur rectangulum contentum sub rectis AB & BC [vel sub rectis quæ ipsis æquales sunt] rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud est oblongum, aliud quadratum. Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum est, quod sub duabus æqualibus continetur.

NOTA. Signum æqualitatis in hoc libro est, $\approx$. [nempe in demonstr. Tacquetianis. Aliæ signa, hic & alibi in additis adhibita, explicantur in initio, ante Tacqueti præf. ad lectorem.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. lib. 2. SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera secta sit in quocunque partes (AE, EF, FC:) erit rectangulum sub illis duabus (AB, AC) comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub infecta (AB) & singulis sectæ partibus (AE, EF, FC) continentur.

Statue AB perpendicularem ad AC; per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. (a) Erit BC rectangulum sub AB, & AC: & est æquale rectangulis BE, IF, LC; hoc est (quia tam IE, quam LF sunt (b) æquales AB,) rectangulis (c) sub AB, AE, sub AB, EF, sub AB, FC.

l. 2. [Coroll. Hinc ampliori demonstratione firmari potest problematis quod in Scholio post prop. 45. lib. 1. legitur, solutio ibidem tradita. Si nempe quadrilaterum BF per rectam AC in triangula ABC, AFC resolvatur; bisecta AC in S, ex oppositis angulis B, F, in basim communem AC ductis perpendiculis BO, FI, ex S erigatur SL earum summa æqualis: ostendendum est rectangulum sub CS & SL æuari quadrilatero BF. Cum enim triangula ABC, AFC (d) æquantur re-

(a) Per def. l. 2.
(b) Per 29. & 34. l. 1.
(c) Per def. l. 2.
(d) Per prop. 41. lib. 1.

Fig. 83. l. 1.

angulis

angulis sub CS & BO, & sub CS & FI respectivè; cumque recta LS aequatur ipsis BO & FI simul sumptis, & dividatur in partes, SD, DL, ipsis BO, FI respectivè aequales; Ergo triangula ista, seu quadrilaterum BF, rectangulis CD, LE, sub insecta CS, & singulis sectæ LS partibus, hoc est, vi hujus prop. rectangulo LC sub duabus CS & LS aquari necesse est.]

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera sunt in numeris, si, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per seipsum.

[Sit numerus insectus 9, & sectus 12, qui in partes tres nimirum 3, 4 & 5 dividatur. Erit rectangulum ex 9 in 12 ducto = 108 aequale rectangulis tribus 27 & 36 & 45, ex 9 in 3 & 9 in 4 & 9 in 5 respectivè ducto compositis.

Vel sit numerus 432 tanquam multiplicandus sectus in 400 & 30 & 2, atque numerus 8 tanquam multiplicans insectus; erit $8 \times 432 = 3456$ aequalis $8 \times 400 = 3200$, $+ 8 \times 30 = 240$, $+ 8 \times 2 = 16$. Unde etiam Multiplicationis demonstratio peti debet.]

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) secta sit utcumque (in C,) duo Fig. 2.
rectangula sub tota (AB) & partibus (AC, CB) comprehensa, quadrato totius equalia sunt.

Accipiat F æqualis AB.

(a) Per 1. l.
2.

Rect. FAB æ. (a) rect. FAC }
rect. FCB: }

hoc est, quia F & AB sunt æquales inter se;

Quad. ex AB æ. rect. BAC }
rect. ABC. }

[Aliter. Fiat (b) ARDB quadratum rectæ AB, & ad punctum C erigatur (c) recta CH ipsi AB perpendicularis. Anguli 1. itaque ad C recti, angulis A & B æquales sunt, & rectæ AR, (c) Per 11. CH, BD sibi invicem sunt (d) parallela, & AH, BH (e) parallelogramma rectangula. Erit præterea CH recta (f) AR sive (d) Per 29. (g) AB æqualis: & proinde AH, BH sunt (h) rectangula sub l. 1. tota AB & partibus AC, BC comprehensa; & simul sumpta 35. & cor. 1. æquantur quadrato ipsius AB. p. 34. l. 1.

Fig. 3.

(b) Per 46. l.

(c) Per 11.

(d) Per 29.

(e) Per def.

35. & cor. 1.

p. 34. l. 1.

Sit (f) Per 34.

l. 1.

(g) Per construct. (h) Per def. l. 2.

Sit numerus 8 in 5 & 3 sectus: quadratum totius $8 \times 8 = 64$ aequale est rectangulis $8 \times 3 = 24$ & $8 \times 5 = 40$.]

PROPOSITIO III.

Fig. 4.

SIT recta (AB) utcumque secta (in C:) Erit rectangulum sub tota (AB) & partium alterutra (BC) comprehensum, aequale rectangulo sub partibus (AC, CB) una cum quadrato predictae partis (BC.)

(a) Per 1. l.
2.

Assume F æqualem CB.
Rect. ABF æ. (a) rect. ACF }
rect. CBF: }
hoc est, quia æquales sunt CB & F;
Rect. ABC æ. rect. ACB }
quad. CB. }

Fig. 5. [Aliter. Fiat (b) rectangulum AD sub tota AB & parte CB, (b) Per Schol. & (c) erigatur perpendicularis CE: ob rectam CE, recta (d) BD post 46. l. 1. sive (e) BC aequalem, rectangulum AD sub tota AB & parte (c) Per 11. BC comprehensum, aequabitur rectangulo AE sub partibus AC, l. 1. CB, una cum quadrato EB predictae partis BC.
(d) Per 29. Sit numerus 7 in partes 3 & 4 sectus. Rectangulum $7 \times$
& 34. l. 1. $3 = 21$ aequale est rectangulo $3 \times 4 = 12$ & quadrato 3
(e) Per con- $\times 3 = 9$. Pariter Rectangulum $7 \times 4 = 28$ aequale est re-
ctangulo $3 \times 4 = 12$ & quadrato $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO IV.

Fig. 6.

SIT recta (FL) utcumque secta (in O:) erit quadratum totius aequale quadratis partium (FO, OL) & bis rectangulo sub partibus (FO, OL) contento.

(f) Per 2. l.
2.
(g) Per 3. l.
2.
(h) Per 2.
and.

Quad. FL æ. (f) rect. FLO cum
rect. LFO.
Atqui rect. FLO æ. (g) rect. FOL }
quad. OL; }
& rect. LFO æ. (h) rect. LOF }
quad. FO. }
Ergo quad. FL æ. rect. FOL }
quad. OL }
rect. FOL }
quad. FO: }

Id est

Id est, quad. FL æ. rect. FOL bis
 quad. OL
 quad. FO.

[Aliter. Fiat FGDL quadratum recta FL, & ducta dia- Fig. 7.
 metro GL, in triangulo FGL, ob equalia latera FG, FL &
 angulum F rectum, erunt anguli FGL, FLG semirecti (a) & (a) Per cor.
 aequales. Per punctum O ducatur ipsi FG vel LD parallela^{11. pr. 32.}
 OK, qua secet diametrum GL in C; & per punctum C ipsi^{l. 1.}
 FL vel GD parallela agatur HI: Propter omnes angulos qua-
 drati FD rectos, erunt etiam omnia parallelogramma FC, OI,
 HK, CD rectangula (b); & ob parallelas OK, FG, erit (c) (b) Per cor.
 externus ang. LCO aqualis interno & opp. FGL, hoc est, 1. pr. 34. l.
 FLG semirecto. Ergo in triangulo LOC, latera OC, OL sunt 1.
 (d) aequalia: Aequantur (e) etiam rectanguli OI opposita late- (c) Per 27.
 ra OL, CI; OC, LI; & proinde OI est (f) quadratum recta^{l. 1.}
 OL: Et eodem modo demonstrabitur HK quadratum esse recta HC, (d) Per 6.
 vel (g) FO. Et cum CO, OL aquantur, erit FC rectangulum (e) Per 34.
 sub partibus FO, OL data recta FL. sed rectangula FC, CD l. 1.
 sunt (h) aequalia, & proinde FC, CD simul sumpta, aquantur (f) Per def.
 bis rectangulo sub partibus FO, OL. Quare FD quadratum^{32. l. 1.}
 totius recta FL, aequatur ipsis HK, OI, partium FO, OL qua-
 dratis, una cum FC, CD bis rectangulo sub partibus. Q. E. D. ^{l. 1. & axio.}

Sit numerus 10 in partes 7 & 3 sectus. Quadratum $10 \times 10 = 100$ aequale est quadratis partium $7 \times 7 = 49$ & $3 \times 3 = 9$, & duobus rectangulis $7 \times 3 = 21$ & $7 \times 3 = 21$.
 Vel sit numerus 12 in partes 10 & 2 divisus. Quadratum
 totius $12 \times 12 = 144$ aequale est quadratis partium $10 \times 10 = 100$ & $2 \times 2 = 4$, una cum bis rectangulo 10×2 , sive
 $2 \times 10 \times 2 = 40$. Et hinc pendet radices quadraticæ extractio.

Corollarium 1. Hinc liquet parallelogramma (circa diame- Fig. 7.
 trum quadrati) OI, HK esse quadrata.

2. Item diametrum cujuscvis quadrati ejus angulos bise-
 care. Est enim FLD ang. rectus, & FLG semirectus.

3. Quadratum lineæ dimidiæ est quadrati lineæ integra pars
 quarta. Promotis enim rectis OK, HI, motu parallelo, usque
 ad media puncta A & B, M & N laterum quadrati FD;
 rectangula FC, CD, & quadrata OI, HK in quatuor aequalia
 quadrata desinent. Et eodem modo constabit rectangulum (sive
 etiam parallelogrammum quodlibet) sub duabus rectis quibus-
 vis, rectanguli (seu parallelogrammi parallelogrammo dato
 equianguli) sub earum dimidiis esse quadruplum.

4. Quadratum quodvis FD aequale est bis rectangulo sub
 quadrati latere FL seu CD, & lateris dimidio LN seu ND.
 Aequatur enim rectangulis FN, MD simul sumptis. Item
 parallelogrammum quocvis, aequale est bis parallelogrammo æ-
 quiangulo sub uno quocvis latere & alterius dimidio.] PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 8. *SI recta (QX) secta fuerit aequaliter (in R) & inaequaliter (in S,) erit rectangulum sub inaequalibus partibus (QS, SX) contentum, una cum quadrato partis intermediae (RS) aequale quadrato dimidia (QR.)*

(a) Per 1.
l. 2.

Rect. QSX (a) æ. rect. QR, SX }
rect. RSX. }
Rect. QR, SX æ. rect. RXS;
id est,

(b) Per 3.
l. 2.

æ. (b) rect. RSX }
quad SX. }
Ergo rect. QSX æ. rect. RSX }
quad. SX }
rect. RSX. }

(c) Per 4.
l. 2.

Addatur utrisque quad. RS : habebitur,
{ rect. QSX æ. rect. RSX } id est,
{ quad. RS quad. SX } (c) quad. RX
rect. RSX } seu QR.
quad. RS; }

Fig. 9.

[Aliter. Super recta QX parte dimidia RX fiat quadratum RE, & ducta diametro XE, per S ducatur SG ipsi RE vel XF parallela, qua secet diametrum in H; & per H, ipsi QX vel EF parallela agatur KI, secans RE in L,

(d) Per cor. 1. praced. & per Q ipsi RL parallela agatur QK. Propter (d) quadratum SI, circa diametrum quadrati RE, erit SX (c) = SH;
(e) Per def. 32. l. 1. & ob parallelogrammum SL, erit etiam RS (f) = LH, &
(f) Per 34. l. 1. RL = SH = SX. Est autem QR (g) = RX (h) = XF.
Unde QL (i) = SF. Commune adjiciatur RG, & QH + LG
(g) Per hy. = RF. Sed QH est rectangulum sub recta QX partibus inaequalibus QS, SX; & LG est (k) quadratum partis intermediae RS; & RF est (l) quadratum dimidia RX. Ergo, si
(h) Per def. 32. l. 1. recta QX, fuerit secta aequaliter in R, & inaequaliter in S;
(i) Per def. l. 2. erit, &c. Q. E. D.

(k) Per cor. 1. praced. & draticarum adfectarum constructio Geometrica, uti ad prop. 34. l. 1. 28. & 29. lib. 6. plenius explicabitur.

(l) Per con- str. Sit numerus 8 sectus aequaliter in 4 & 4, atque inaequaliter in 5 & 3. Erit rectangulum $5 \times 3 = 15$ una cum quadrato $1 \times 1 = 1$ aequale quadrato $4 \times 4 = 16$.

Cor. 1. Hinc rectangulum QSX, partium inaequalium, minus est quadrato QR (sive dimidia QX.) Nam per hanc prop.

prop. Rectangulum $\mathcal{Q}SX$, una cum quadrato RS , aequatur quadrato $\mathcal{Q}R$.

Cor. 2. Quo propius accedit punctum S ad medium punctum R , eo majus erit rectangulum $\mathcal{Q}SX$, & quo longius a medio puncto recedit, eo minus erit idem rectangulum. Punctum enim S accedendo minuit, & recedendo auget partem intermediam RS ; unde (a) etiam RS quad. minuetur & auge- (a) Per axio. bitur respective. Et cum per hanc prop. sit RS quad. + $\mathcal{Q}SX$ ¹⁶. rect. = $\mathcal{Q}R$ quad. Ergo, quo minus fuerit RS quad. eo majus erit rectang. $\mathcal{Q}SX$, & vice versa.

Cor. 3. Quo propius accedit punctum S ad medium punctum R , eo minor erit summa quadratorum partium inaequalium $\mathcal{Q}S$, SX ; & quo longius S a medio puncto recedit, eo major erit illa summa. Nam $\mathcal{Q}Xq = (b) \mathcal{Q}Sq + SXq + 2\mathcal{Q}SX$. Sed (b) Per 4. punctum S propius accedendo ad R , rectangulum $\mathcal{Q}SX$ auget l. 2. (c), & recedendo minuit. Ergo idem punctum S ad medium (c) Per cor. R propius accedendo minuit $\mathcal{Q}Sq + SXq$ & recedendo auget. praced.

Cor. 4. In fig. 7. rectangulum FOL partium inaequalium Fig. 7. recta FL quater sumptum, quadrato ipsius FL minus est. Nam quadratum dimidia FL quater sumptum (d) aequatur quadra- (d) Per cor. to FL : Sed rectan. FOL (e) minus est quadrato dimidia FL ; 3. pr. 4. l. 2. & proinde rectang. FOL quater sumptum, minus est quadra- (e) Per cor. to dimidia FL quater sumpto, siue minus est quadrato ipsius ¹. hujus. FL . $\mathcal{Q}$. E. D.

Cor. 5. Si due rectae aequales AB , CD , ita dividantur in Fig. 10. E , F , ut rectangulum AEB sub partibus unius, aequale sit re- tangulo CFD sub partibus alterius; erunt unius partes parti- bus alterius respective aequales, major majori, & minor minori, si partes fuerint inaequales. Si enim puncta E , F , bifecant rectas aequales AB , CD , liquet AE esse = CF , & EB = FD ; sin (f) Per axio. aliter, bifecentur AB , CD , in M & N ; atque earum semisses 6. MB , ND aequales (f) erunt, & proinde MBq (g) = NDq . (g) Per axio. Sed per hanc prop. MBq = AEB rect. + MEq , & NDq = ¹⁵. CFD rect. + NFq . Ergo (h) AEB rect. + MEq = CFD rect. (h) Per axio. + NFq . Et ablatis rectangulis ex hypotesi aequalibus, (i) erit ¹. (i) Per axio. MEq = NFq , & ME = NF ; quae si aequalibus AM , CN ad- 3. dantur, & ab aequalibus MB , ND subtrahantur, (k) habe- (k) Per axio. bitur AE = CF , & EB = FD . $\mathcal{Q}$. E. D. 2. & 3.

Cor. 6. Rectangulum sub summa & differentia duarum Fig. 8, 9. rectarum ($\mathcal{Q}R$, RS) aequatur differentia quadratorum ab illis rectis factorum. Nam per hanc prop. rect. $\mathcal{Q}SX$ + quad. RS = quad. $\mathcal{Q}R$. Aufer utrinque quad. RS , & erit rect. $\mathcal{Q}SX$ = quad. $\mathcal{Q}R$ - quad. RS . Cum igitur $\mathcal{Q}S$ sit rectarum $\mathcal{Q}R$, RS summa, & (propter $\mathcal{Q}R$ = RX) SX sit earum differentia, liquet propositum.]

PRO.

PROPOSITIO VI.

Fig. 11.

SI recta (AB) sit bifariam secta (in C) eique recta quadam adjiciatur (BF;) erit rectangulum sub tota composita (AF) & adjecta (BF) contentum, una cum quadrato dimidia (CB) aequale quadrato (CF) composita ex dimidia & adjecta.

Adde in directum LA, æqualem adjectæ BF. Cum æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF secta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

(a) Per præced.

Ergo $\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. LBF} \\ \text{cum} \\ \text{quad. CB} \end{array} \right. \text{Æ. (a) quad. CF.}$

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF;

rect. LBF Æ. rect. AFB.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ergo rect. AFB} \\ \text{quad. CB} \end{array} \right. \text{Æ. quad. CF.}$

Fig. 12.

[Aliter. Constructa enim figura 12. super data recta ACBF, eodem prorsus modo quo in prop. præced. super recta QRSX figuram 9. construximus, erit AN rectangulum sub tota composita AF & adjecta BF; & KG quadratum ipsius CB, sive dimidia AB; CE vero quadratum ipsius CF, nempe composita ex dimidia & adjecta. Et ob rectangulum HE rectangulo AK aequale, (nam AK (b) = KB (c) = HE) & reliquum spatium utrinque commune, liquet propositum.

(b) Per 36.

l. 1.

(c) Per 43.

l. 1.

Sit numerus 6 sectus æqualiter in 3 & 3: eique addatur numerus 2. Erunt rectangulum $8 \times 2 = 16$ & quadratum $3 \times 3 = 9$ aequalia quadrato $5 \times 5 = 25$.

Fig. 11.

Cor. 1. Hinc si tres rectæ, AF, CF, BF fuerint arithmetice proportionales, (hoc est, si differentia AC inter primam & secundam, differentia CB inter secundam & tertiam fuerit æqualis;) erit rectangulum sub extremis AF, BF, una cum quadrato differentia AC vel CB, aequale quadrato media CF.

Fig. 12.

Cor. 2. Hinc rectangulum AN, minus est quadrato CE, defectu quadrati KG, quod datâ rectâ AB, semper idem manet; utcumque augeatur recta BF. Ex augmento verò ipsius BF, rectangulum AN ad quadratum CE magis magisque accedit, tam proportionem, quam figurâ; ita ut differentia ista KG, respectu magnitudinis figurarum AN & CE, tandem videatur contemnenda.]

PRO.

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcumque secta (in C.) c. Fig. 13.
 Erunt quadrata totius (AB) & segmenti alter-
 utrius (AC,) aequalia bis rectangulo contento sub
 tota (AB) & segmento dicto (AC,) una cum qua-
 drato segmenti alterius (CB.)

Quad. AB (a) æ. rect. BCA bis
 quad. AC
 quad. BC. }

(a) Per 4.
 l. 2.

Adde utrisque quad. AC: erunt
 { Quad. AB æ. rect. BCA bis
 { quad. AC quad. AC bis
 quad. BC. }

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, æquatur (b) (b) Per 3.
 rectangulo BAC bis. Quare si pro BCA bis & quad. AC l. 2.
 bis substituamus BAC bis; erit

{ Quad. AB æ. rect. BAC bis
 { quad. AC quad. BC. }

[Aliter. Constructa figura 14, ita ut AD sit quadratum Fig. 14.
 totius AB, & AL quadratum partis AC, ductaque quadrati
 AD diametro EB, & producta LC in F, qua secet diame-
 trum in G, & per G ducta HI parallela ipsi AB vel ED,
 erunt recta HK, HI toti AB & sibi invicem æquales; (nempe
 HK = HA + AK, & AK (c) = AC, AH (d) = CG (e) (c) Per con-
 = CB, unde HK = AC + CB = AB (f) = HI;) & HE, str. & def.
 HG parti AC & sibi invicem æquales. Unde ob duo æqualia 32. l. 1.
 rectangula sub tota AB & parte AC, nempe HD, HL; & (d) Per 34.
 CI quadratum partis alterius, idem spatium cum quadratis l. 1.
 AD, AL continetia, liquet propositum. (e) Per cor.
 1. pr. 4. l. 2.

Sit numerus 13 utcumque sectus in 9 & 4. Erunt qua-
 drata 13 X 13 = 169 & 9 X 9 = 81 æqualia 13 X 9 = l. 1.
 117 & 13 X 9 = 117 & quadrato 4 X 4 = 16. (f) Per 34.

Propositio quarta nobis exhibet radices binomia quadratum: l. 1.
 ex hac autem septima elicietur quadratum radices residua, per
 sequens

Corollarium. Si a recta BA auferatur pars AC; quadra Fig. 15.
 tum residua BC, a quadratis totius BA & ablata AC simul
 sumptis exceditur, bis rectangulo BAC quod sub tota & ab-
 lata continetur. Nam per hanc prop. BAq + ACq = 2 rect.
 BAC + BCq; & utrinque subducendo 2 rect. BAC, erit BAq
 = 2 rect. BAC + ACq = BCq. Q. E. D.

Fig. 14. Sic sane, in fig. 14. $CI = AD + AL - HD - HL$; hoc est, $BCq = BAq + ACq - \text{rect. } BAC \text{ bis.}$

PROPOSITIO VIII.

Fig. 15. **S**I recta (LF) fuerit secta bifariam (in I) ei-
que quadam recta adjiciatur (FO;) erit re-
ctangulum (LIO) quod sub (LI) dimidia, &
(IO) composita ex dimidia & adjecta continetur,
quater sumptum, una cum quadrato adjectæ (FO,)
æquale quadrato totius compositæ (LO.)

(a) Per præc.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Quad. IO} \\ \text{quad. IF} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(a) } \text{æ. rect. OIF bis} \\ \text{quad FO.} \end{array}$$

hoc est, quia ex hyp. FI, LI sunt æquales, ac proinde quad.
FI est quad. LI, & rect. OIF est rect. OIL, seu LIO,

$$\left. \begin{array}{l} \text{quad. IO} \\ \text{quad. LI} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{æ. rect. LIO bis} \\ \text{quad FO.} \end{array}$$

Quare si utrisque æqualibus addas rect. LIO bis; Erit

$$\left. \begin{array}{l} \text{quad. IO} \\ \text{quad. LI} \\ \text{rect. LIO bis;} \end{array} \right\} \text{id est,}$$

(b) Per 4.
l. 2.

$$\begin{array}{l} \text{(b) quad. LO} \\ \text{æ. rect. LIO bis} \\ \text{quad FO} \\ \text{rect. LIO bis;} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Id est,} \\ \text{æ. rect. LIO quater} \\ \text{\& quad. FO.} \end{array}$$

Fig. 16. [Aliter. Fiat OD quadratum totius compositæ LO, &
ducta ejus diametro LA, per I, F puncta, ipsi LD vel OA
parallela agantur IB, FE, secantes diametrum in R & S; &
per R, S puncta, ipsi LO vel DA parallela agantur TN, MH.

(c) Per cor. Propter LF bisectam in I, (c) erit linea dimidia LI quadratum
3. pr. 4. l. 1. TI. pars quarta quadrati MF linea integra LF, & quatuor

(d) Per cor. rectangula TI, RF, MR, P (d) erunt quadrata sibi mutuo
idem. æqualia. Deinde, propter F (d) æqualium quadratorum

(e) Per 36. l. latera, & proinde æqualia, (e) æquabuntur rectangula FN,
1.

(f) Per 43. (h) = BM, & quatuor rectangula FN, QH, BM, BS erunt
l. 1.

(g) Per ean- sibi mutuo æqualia. Porro propter æquales LI, IR, erit RO,
dem. (hoc est, quadratum RF una cum rectangulo FN) rectangu-

(h) Per axio. lum sub dimidia LI, & IO composita ex dimidia & adjecta:
3. Ergo

Ergo quatuor quadrata, TI, RF, MR, P Q, una cum quatuor rectangulis FN, QH, BM, BS æquabuntur rectangulo sub dimidia LI, & composita IO quater sumpto: Est autem EH quadratum adjecta FO. Ergo, si recta LF fuerit secta bifariam in I, eique quadam recta FO adjiciatur; erit &c. Q. E. D.

Sit numerus 12 sectus æqualiter in 6 & 6; eique addatur numerus 4. Erunt quatuor rectangula $10 \times 6 = 240$ & quadratum $4 \times 4 = 16$ æqualia quadrato $16 \times 16 = 256$.

Euclides hanc propositionem hoc modo effert.

Si recta IO fuerit utcumque secta in F; erit rectangulum Fig. 16. OIF quod sub tota IO, & una parte IF continetur, quater sumptum, una cum quadrato reliquæ partis FO, æquale quadrato quod ex tota & dicta parte $OI + IF$ [seu sumpta in OI producta, recta $IL = IF$, æquale quadrato quod ex OI & IL, nempe LO] tanquam una linea describitur.

Sit numerus 10 divisus in 6 & 4; erit factum ex 6×10 quater sumptum = 240, & $4 \times 4 = 16$; Et $240 + 16 = 256 = 16 + 6 \times 10 + 6$.

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) sit divisa bifariam (in B) & Fig. 17. non bifariam (in F;) erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ (AB) & partis intermedia (BF.)

Quad. AF æ. (a) rect. ABF bis
quad. AB
quad. BF.

(a) Per 4.
l. 2.

Addito igitur utrisque quad. FC,

{ quad. AF æ. rect. ABF bis
quad. FC quad. AB
quad. BF
quad. FC.

Sed rect. ABF est rect. CBF, quia AB, BC sunt æquales ex hyp.

Ergo { quad. AF æ. rect. CBF bis
quad. FC quad. AB
quad. BF
quad. FC.

Atqui (b) CBF bis cum quad. FC æquantur quadratis (b) Per 2.
BC, BF, seu AB, BF: quare si hæc illis substituas, erunt
E 2 quad.

{ quad. AF
quad. FC

æ. quad. AB }
quad. AB }
quad. BF }
quad. BF; }
Id est,
quad. AB } bis
quad. BF }

Fig. 18.

[Aliter. Ad punctum B erigatur BE aequalis & perpendicularis ipsi BA vel BC; & ductis AE, EC, per F agatur ipsi BE parallela FQ, & per Q ducatur QG parallela recta AC, & ducatur AQ. Propter ang. ABE rectum & lineas AB, BE

- (a) Per cor. aequales, (a) erunt BAE, BEA semirecti; & ob eandem rationem erunt BCE, BEC semirecti; Unde AEQ est rectus. Et l. 1. propter (b) QFC rectum, & C semirectum, erit & FQC
(b) Per 27. (c) semirectus, & recta FQ. FC erunt (d) aequales. Et quoniam rectas parallelas GQ, AC secat recta EB, erit (e) externus ang. EGQ aequalis interno & op. EBC, & proinde
(c) Per cor. 6. pr. 32. l. 1. rectus; angulus vero GEQ est semirectus; ergo & GQE (f) semirectus erit, & recta GE, GQ erunt (g) aequales; & propter
(d) Per 6. l. 1. BQ rectangulum, (h) aequatur GQ ipsi BF. Unde in triangulo rectangulo ABE, propter aequales rectas AB, BE erit AE
(e) Per cor. 6. pr. 32. l. 1. quadratum (i) duplum quadrati AB partis dimidia; & in triangulo rectangulo EGQ, propter aequales EG, GQ, erit EQ
(f) Per 6. l. 1. (k) quadratum duplum quadrati GQ vel BF partis intermedia. Quadrata vero AE & EQ aequalia sunt (l) quadrato AQ;
(g) Per 34. hoc est, quadratis (m) AF & EQ sive AF & FC partium inaequalium. Ergo quadrata partium inaequalium AF, FC, dupla sunt quadratorum partis dimidia AB, & partis intermediae BF. Q. E. D.
(h) Per idem. Sit numerus 32 divisus aequaliter in 16 & 16; & inaequaliter
(i) Per 47. in 20 & 12. Erunt quadrata $20 \times 20 = 400$ & $12 \times 12 = 144$ dupla quadratorum $16 \times 16 = 256$ & $4 \times 4 = 16$.]
(k) Per eand.

PROPOSITIO X.

Fig. 19.

SI recta (FI) sit bisecta (in L) eique quadam recta adjiciatur (IO;) erunt quadrata totius composita (FO) & adjecta (IO) dupla quadratorum quae describuntur super dimidia (FL) & super (LO) composita ex dimidia & adjecta.

Adjiciatur in directum QF, aequalis IO. Quia ergo etiam FL,

FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO bisecta est in L, & aliter in I. Ergo

$\left. \begin{array}{l} \text{quad. QI} \\ \text{quad. IO} \end{array} \right\} \text{Æ. (a) quad. QL} \left. \begin{array}{l} \\ \text{quad. LI} \end{array} \right\} \text{bis.}$ (a) Per præc.

Sed quad. QI est quad. FO, & quad. QL est quad. LO, & quad. LI est FL.

Ergo $\left. \begin{array}{l} \text{quad. FO} \\ \text{quad. IO} \end{array} \right\} \text{Æ. quad. FL} \left. \begin{array}{l} \\ \text{quad. LO} \end{array} \right\} \text{bis.}$

[Aliter. Ad L punctum, recta FL vel LI æqualis & perpen Fig. 20.
dicularis agatur LE, & ducantur FE, EI; & per E ducatur
EQ parallela ipsi FO; & per O ducatur OQ parallela ipsi LE:
& ob rectas parallelas EL, QO, recta EI, QO non parallela,
si producantur, (b) concurrent alicubi. Producantur donec con- (b) Per cor. 1.
current in G, & ducatur FG. Propter angulum FLE rectum, Schol. post
& FL, LE æquales, (c) erunt LFE, LEF semirecti; & pari 31. l. 1.
ratione LIE, LEI (d) erunt semirecti, & proinde FEI rectus. (c) Per cor.
Porro angulus OIG, oppositus ad verticem semirecto LIE, (e) 11. pr. 32. l.
est etiam semirectus: & propter parallelas EL, QG, a recta (d) Per idem.
FO sectas in L & O, & angulum ELO rectum, erit etiam (e) Per 15.
ang. (f) alternus GOL rectus: quare in triangulo GOI, propter l. 1.
angulum ad O rectum & ad I semirectum, erit & ang. OGI (f) Per 27.
(g) semirectus, & proinde latera OG, OI (h) erunt æqualia. l. 1.
Et cum in parallelogrammo LQ, angulus L rectus sit, etiam (g) Per cor.
oppositus Q rectus (i) erit. Quare in triangulo EQG, l. 1.
propter Q rectum, & QGE semirectum, erit & QEG (k) (h) Per 6.
semirectus, & latera QE, QG (l) æqualia: sed in rectang. l. 1.
LQ, est EQ (m) = LO: quare LO = EQ = QG. Jam (i) Per 34.
vero, in triangulo rectangulo FLE, propter latera FL, LE æqua- l. 1.
lia, FE quadratum duplum (n) est quadrati FL partis dimi- (k) Per cor.
dia; & in triangulo rectang. EQG, propter latera QE, QG 6. pr. 32. l.
æqualia, erit EG quadratum, (o) duplum quadrati EQ vel l. 1.
LO composita ex dimidia & adjecta. Quadrata vero FE & (l) Per 6. l.
EG æqualia sunt (p) quadrato FG; hoc est, (q) quadratis FO (m) Per 34.
totius composita, & OG vel OI partis adjecta. Ergo (r) qua- l. 1.
drata totius composita FO, & adjecta OI, dupla sunt quadra- (n) Per cor.
torum dimidia FL, & LO composita ex dimidia & adjecta. 1. pr. 47. l.
Q E D. (o) Per idem

Sit numerus 40 sectus æqualiter in 20 & 20, eique adda- l. 1.
tur numerus 14. Erunt Quadrata $54 \times 54 = 2916$ & (q) Per eand
 $14 \times 14 = 196$ dupla quadratorum $20 \times 20 = 400$, & (r) Per axio
 $34 \times 34 = 1156$.] 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 21.

Datam rectam (AB) ita secare (in C), ut rectangulum (ABC) sub tota & una parte contentum, æquale sit quadrato partis reliquæ (AC .)

Ex A erige perpendicularem AF parem AB . AF biseca in X . Duc rectam XB ; cui ex FA producta æqualem abscinde XI . Tum abscinde AC æqualem AI . Dico factum.

Perficiatur quadratum $BAFS$, & ducta per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum $FILQ$. Quoniam FA bisecta est in X , eique adjecta est AI ; erit

(a) Per 6. l.
2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. FIA} \quad \text{Æ. (a) quad. XI;} \\ \text{quad. XA} \end{array} \right.$$

id est,

(b) Per constr. & axio.
15.

$$\text{Æ. (b) quad. XB;}$$

id est,

(c) Per 47.
l. 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Æ. (c) quad. BA;} \\ \text{quad. XA.} \end{array} \right.$$

Auferatur utrimque quad. XA ; Erit rect. FIA seu FL Æ. quad. BA ; id est AS .

Quare ablato rursus communi AO ;

Erit AL Æ. CS .

Atqui AL est quadratum AC , cum AI, AC ex constr. sint æquales; & CS est rect. ABC , cum BS sit par AB . Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC . Datam igitur rectam secuimus ut petebatur.

Scholium.

Propositiones 10. primæ hujus libri veræ sunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non potest. Neque enim ullus numerus ita secari potest, ut productum ex toto in partem unam, æquale sit quadrato partis reliquæ. [Et hoc quidem demonstravit Tacquetus noster in Schol. post prop. 29 libri tertii elementorum Arithmet. In numeris surdis autem exhiberi possunt quantitates segmentis AC, CB respondentes. Sit $AB = 2$. hoc est, proponatur numerus binarius ita dividendus in partes duas, ut quadratum partis majoris æquetur facto sub toto binario in sui partem minorem ducto. Erit AC , siue pars major $= \sqrt{5} - 1$; & CB , siue pars minor $= 3 - \sqrt{5}$. Sic enim, non solum istarum partium summa toti binario æqualis erit; verum etiam, tum quadratum partis majoris,

tum & factum ex binario & parte minori, aquabitur uni eademque quantitati, nempe $6 - 2\sqrt{5}$.] Porro mira vis est hujus sectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

IN trigono obtusangulo (ACB ,) quadratum la-
teris (AB) obtuso angulo (C) oppositi, quadrata
laterum reliquorum (AC , BC) excedit, rectangulo
(BCF) bis, quod comprehenditur sub (BC) la-
tere alterutro obtusum angulum (ACB) continen-
tium, in quod, cum protractum fuerit, cadit per-
pendicularis (AF ;) & sub (FC) intercepto ex-
terius latere inter perpendicularem & obtusum an-
gulum. Fig. 22.

Quad. AB æ. (a) quad. AF } (a) Per 47.
quad. BF } l. 1.

Sed quad. BF est (b) æquale quadratis FC , CB , & rect. BCF bis. (b) Per 4.
Ergo si hæc substituas pro quad. BF ; erit l. 2.

Quad. AB æ. quad. AF }
quad. FC }
quad. CB }
rect. BCF bis. }

Atqui quadrata AF , FC æquantur quadrato (c) AC . (c) Per 47.
Quare hoc pro illis substituto, erit l. 1.

Quad. AB æ. quad. AC }
quad. CB }
rect. BCF bis. }

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (ACB ,) quadratum la-
teris (AB) acuto angulo (C) oppositi, à quadra-
tis laterum reliquorum (AC , BC) exceditur rectan-
gulo (BCF) bis, quod continetur sub (BC) latere
alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in
quod cadit perpendicularis (AF) ab angulo opposito
(A ;) & sub (CF) intercepta inter perpendicularem
(AF) & acutum angulum (C). Fig. 23, 24

(a) Per 4.
l. 2.

Quad. BC. $\propto$ (a) rect. BFC bis
 quad. BF
 quad. FC.

(b) Per 47.
l. 1.

Et Quad. AC (b) $\propto$ quad. FC
 quad. AF.

Quare duo { quad. BC $\propto$ rect. BFC bis
 simul { quad. AC quad. BF
 quad. FC bis
 quad. AF.

(c) Per 3. l.
2.

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur (c)
 rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis substituto,

{ Quad. BC $\propto$ rect. BCF bis
 { quad. AC. quad. BF
 quad. AF.

(d) Per 47.
l. 1.

Atqui quadrata AF, BF sunt (d) quad. AB. Ergo hoc
 pro illis substituto,

{ Quad. BC $\propto$ rect. BCF bis
 { quad. AC quad. AB;

Hoc est, BC, AC quadrata excedunt quad. AB rectan-
 gulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 25.

(e) Per cor.

3. p. 32. l. 1.

Vera est propositio licet perpendicularis [AF, propter
 angulum ABC (e) obtusum,] cadat extra triangulum,
 [in latus CB productum.] Demonstratio fere eadem est.
 [Vel sic:

(f) Per 12.
l. 2.

Quad. AC $\propto$ (f) rect. CEF bis
 quad. CB
 quad. AB.

Addito igitur utrique quadrato CB,
 { quad. AC $\propto$ rect. CEF bis
 { quad. CB quad. CB bis
 quad. AB.

(g) Per 3.
l. 2.

Atqui rectang. CEF bis, una cum quadrato CB bis, æquatur
 (g) rectangulo BCF bis:

Ergo { quad. AC $\propto$ rect. BCF bis
 { quad. BC quad. AB.

Fig. 23, 24.
25.

(h) Per 7. l.

2.

(i) Per 47.

l. 1.

(k) Per eand.

ALITER & universalius demonstrabitur prop. 13, siue cadat
 perpendicularis intra triangulum, siue extra.

BCq + CFq = (h) 2 rect. BCF + BFq. Adde utrinque AFq;

BCq + CFq + AFq = 2 rect BCF + BFq + AFq. Sed CFq

+ AFq = (i) ACq, & BFq + AFq = (k) ABq. Ergo BCq

+ ACq = 2 rect. BCF + ABq. Q. E. D.]

Scholium (1.)

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimensio cujuscunque trianguli cujus tria latera sint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innotescit perpendicularis, etiamsi eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semissem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex scholio propof. 41. l. 1.

Esto trigonum quodcunque ACB nota habens latera. O-
 porteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo 24.
 A in latus oppositum BC dñmissam. / e

Quadratum lateris AB acuto C oppositi, aufer ex summa quadratorum AC, CB. Per 13. residuum erit rectangulum BCF bis. Residui semissem (hoc est, rectangulum BCF) divide per notum latus BC. Proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato AC. Residuum dabit quadratum (1) AF, cujus radix quadratica dabit perpendicularem AF.

(a) Per prob.
 2. Schol. post
 47. l. 1.

[Ex. gr. sit $AB=13$, & $BC=14$, & $AC=15$. Erit Fig. 24.
 $ABq=169$, & $BCq+ACq=196+225=421$. Unde
 $2BCF (=BCq+ACq-ABq=421-169)=252$, &
 propterea $BCF=126$, & $CF=9$. Ergo $AFq (=ACq-
 CFq=225-81)=144$, & $AF=12$. Et trianguli area
 erit $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$.]

Obtinere id ipsum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. suf. Fig. 23, 24. ficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppositum, intra triangulum cadat.

[Ne autem Tyronibus desit exemplum, quo etiam ex prop. Fig. 22.
 12. aream trianguli obtusanguli, (ubi perpendicularis cadit extra triangulum,) datis lateribus, obtinere possint; In triangulo obtusangulo ABC, (fig. 22.) sit $AB=20$, $AC=13$, $BC=11$. Erit $ABq=400$, $ACq+BCq=169+121=290$. Unde $ABq-ACq-BCq=400-290=110=2BCF$, $BCF=55$, $CF=5$, $CFq=25$, $ACq-CFq=169-25=144=AFq$. Unde $AF=12$, & $\frac{1}{2} AF \times BC=6 \times 11=66$ est area trianguli ABC.

Scholium (2.) Si a trianguli cujuscunque (ACB) vertice (A) Fig. 24, 25. in basem (CB) si opus productam, demittatur perpendiculum (AF); erit differentia quadratorum e lateribus (AC, AB.) æqualis duplo rectangulo sub basi (CB,) & $(CF-\frac{1}{2} CB)$ distantia perpendiculi a medio basis. Vide Arithmet. Univers. pag. 103. edit. primæ.

Nam

Nam per hanc prop. $ACq + BCq = ABq + 2BCF$.

Et subductis utrinque $ABq + BCq$, erit $AC - ABq = 2BCF - BCq$.

(a) Per cor. Sed $BCq = (a) 2BC \times \frac{1}{2}BC$. Ergo $ACq - ABq = 2BC \times$
4. p. 4. l. 2. $CF - \frac{1}{2}BC$. Q. E. D.

Fig. 26. Si latera AB , AC sint aequalia, perpendicularum cadet in me-
(b) Per n. 1. dium (b) basis; adeoque tum differentia quadratorum e late-
Schol. p. 26. ribus, tum distantia perpendiculari a medio basis simul evanes-
i. 1. cunt.

Fig. 27. Si alteruter angulorum ad basim sit rectus, ut B ; perpendi-
culum AF cum latere AB coincidet; & differentia quadra-
(c) Per pr ob. torum e lateribus (c) aequatur quadrato basis CF . Di-
2. post 47. l. stantia autem perpendiculari a medio basis aequatur basis dimi-
1. dio, & proinde duplum rectang. sub basi & ista distantia, hoc
(d) Per cor. est, sub basi & basis dimidio, (d) aequatur etiam quadrato
4. p. 4. l. 2. basis. Quare differentia quadratorum e lateribus equalis erit
duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculari a medio
basis.

Fig. 28. Schol. 3. Si a trianguli cujuscvis ABP vertice A ducatur recta
 AC basem BP bisecans in C , erunt quadrata laterum AB , AP
simul sumpta, dupla quadratorum dimidia basis BC , & recta
 AC bisecantis basem, simul sumptorum. A vertice A demitta-
(e) Per cor. tur AF perpendicularis basi, & cadat inter C & P . (e) Erit
3. p. 32. l. 1. itaque angulus ACB obtusus, & ACP acutus. Unde per prop.
12, erit $ABq = ACq + CBq + 2BCF$. & per prop. 13, erit
 $APq = ACq + CPq - 2PCF$. sed propter $BC = PC$, erit CBq
(f) Per axio. $= (f) CPq$, & $2BCF = (g) 2PCF$. Unde $CBq + CPq =$
15. (h) $2CBq$, & $2BCF - 2PCF (i) = 0$. Ergo aequalibus ad-
(g) Per 36. dendo quantitates aequales, provenient aequalia aggregata, ABq
4. 1. $+ APq = 2ACq + 2CBq$. Q. E. D.

(h) Per axio. Coroll. Iisdem manentibus base BP , & recta AC bisecante
6. basem, utcunque ad basem varie inclinata, ut aC , idem ma-
(i) Per axio. nebit aggregatum quadratorum crurum; scil. $ABq + APq =$
3. $aBq + aPq$ Et sic ubique.

Hac autem propositio ad Curvarum tangentes, diametros & ordinatas applicari potest. Tangant v. gr. recta AB , AP , conicam quamlibet sectionem vel sectiones oppositas in B & P ; & juncta BP bisecetur recta AC : erit BC vel PC ordinata ad diametrum AC . Unde quadrata tangentium AB , AP dupla erunt quadratorum ordinate BC vel PC , & diametri inter ordinatam ac tangentium concursum intercepta AC . Hac etiam propositione utitur Serenus Antiffensis in sectione conis a plano per verticem ducto. Verum hac extra oleas.]

PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo (QXZ), æquale quadratum con- Fig. 29.
struere.

[*Sume rectam quamvis IA, super qua*] rectilineo QXZ
fac æquale (a) parallelogrammum rectang. CI, cujus latera (a) *Per 45*
 IA , CA , si æqualia fuerint, ipsum erit quadratum quod pe- l. 1.
titur: si inæqualia sint, latus majus IA produc in L , donec
 AL sit par AC . IL biseca in Z ; quo centro per I & L
describe circulum, & producat CA donec circumferen-
tiæ occurrat in B . Quadratum rectæ AB æquale est dato
 QXZ .

Ducatur enim recta ZB . Quoniam IL secta est bifariam
in Z , & aliter in A ; erit

{	rect. IAL	Æ. (b) quad. ZI ; hoc est,	(b) <i>Per 51</i>
	quad. ZA		<i>l. 2.</i>
		Æ. (c) quad. ZB ; hoc est,	(c) <i>Per con-</i>
		Æ. (d) quad. ZA ?	<i>str. & def.</i>
		quad. BA . }	<i>circuli.</i>

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi, remanet (d) *Per 47*
rect. IAL Æ. quad. BA : l. 1.

hoc est, quia AC , AL sunt æquales, erit
rect. CI .

Id est, (e) rectil. QXZ Æ. quad. AB . (e) *Per con-*
str.

Scholium.

Construatio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectiline-
um reducat *ad* rectangulum. Quæ reductio cum
fatis operosa sit, fortasse expeditius problema absolvetur
hunc in modum.

Rectilineum datum resolvatur in tot quadrangula (Z, X)
quot potest. Tum singulis quadrangulis fac (f) rectangula (f) *Per sch.*
æqualia. Si tunc supersit (ut hic contigit) unum triangu- 2. p. 45. l. 1.
lum (Q) illi quoque fac (g) æquale rectangulum. Singulis (g) *Per cor.*
deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac p. 42. l. 1.
demum his omnibus quadratis unum æquale (h) fiat. Erit (h) *Per prob.*
hoc æquale dato QXZ . 1. schol. p.
47. l. 1.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER TERTIUS.

Perfectissimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonstrantur. Libri utilitas vel hoc solo innotescit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Mathesim universam fonte uberrimo. Theoremata illustriora sunt 16, 20, 21, 22, 31, 32, 35, 36.

Continet autem liber hic tertius circuli proprietates: lineasque plurimas & intra ejusdem peripheriam & extra ad eandem ductas inter se comparat. Circulorum etiam se mutuo interfecantium, & se mutuo, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam sive ad centrum sive ad circumferentiam positos inter se componit. Breviter, Prima Geometriæ Practicæ elementa, circulorum adminiculo potissimum innixa, exponit.

DEFINITIONES.

1. **C**irculi æquales sunt, quorum diametri seu semidiametri sunt æquales.
- Fig. 21. l. 3. 2. Recta (FB) circum tangere dicitur, quæ circulo sic occurrit (in B) ut tamen producta circum non secet.
- Fig. 14. & 15. 3. Circuli tangere se dicuntur, cum sibi sic occurrunt, ut tamen non secent.
- Fig. 19. 4. In circulo æqualiter a centro (A) distare dicuntur rectæ (BC, FL) cum perpendiculares (AI, AO) quæ ex centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. [Et si perpendiculares in rectas (XZ, BI) demissæ, sint inæquales, magis a centro distare dicitur ea recta (XZ) in quam cadit major perpendicularis.]
- Fig. 29. 5. Segmenta, seu portiones circuli sunt partes (CQE, CSE) in quas circum dividit recta (CE) circum secans, [quæ segmenti utriusque basis est.]
- Fig. 38. 6. Angulus in segmento est (BQC) qui continetur sub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex segmenti terminis (C, B) ducuntur.
- Fig. 34, 35. 7. Angulus (CQB) insistere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.
- Fig. 34. 8. Sector est pars circuli a duabus semidiamentris (AB, AF) & arcu

& arcu (BF vel BCF) quem semidiametri intercipiunt, comprehensa.

[9. *Angulus* (BAO) *segmenti* (ABO) est, qui *basi segmenti* (BA) & *arcu* (BOA) comprehenditur. Fig. 22.

10. *Recta* BC *circulo inscripta*, vocatur *arcuum* BAC, BIC, Fig. 49. *vel anguli ad centrum* BDC *chorda sive subtensa*. Et, si ab *arcu* AB *extremo* A *ducatur* *diameter* AI, & in eam ab *altero arcu* extremo B *cadat* *perpendicularis* BG; appellatur hac *arcuum* BA, BI, *sive angulorum ad centrum* BDA, BDI *sinus rectus*, *vel simpliciter sinus*; eritque GA, *arcus* AB *vel anguli* ADB (& GI *arcus* IB *vel anguli* IDB) *sinus versus*. Porro, si *producatur* *radius* DB *donec* *recta* EF (*circulum tangenti in A*) *occurrat in E*, *recta* AE *nominatur* *arcuum* AB, BI, *vel angulorum* ADB, BDI *tangens*, & *recta* DE *eorundem arcuum vel angulorum secans*. Præterea, *anguli ad centrum recti* ADK *sinus rectus* DK (qui in hoc casu, *circuli radius* erit,) *peculiari nomine sinus totus appellatur*. Denique *sinus rectus* BL *anguli* BDK (quod *complementum est anguli* ADB *ad rectum*) *vocatur* *cosinus anguli* ADB; item HK *tangens*, & HD *secans ejusdem anguli* BDK, *est anguli* ADB *cotangens & cosecans respectivæ*.]

PROPOSITIO I.

Dati *circuli centrum invenire*.

Ducatur in circulo *recta* BC *utcumque*, quam *biseca in Q*. Fig. 1. l. 3. Per Q *duc* *perpendicularem* LF. Hanc *biseca in A*. Erit A *centrum*.

Si *negas*; *centrum* esto O *extra rectam* FL, (nam in FL *esse non poterit*, cum *ubilibet extra A dividatur inæqualiter*;) *ducanturque* BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O *centrum esse*, erunt BO, CO *æquales*. Triangula igitur BOQ, COQ *sibi mutuo æquilatera sunt*, cum etiam ex *constr.* BQ & QC *sint pares*, & QO *communis*. Ergo (a) *angulus* OQC *æquatur angulo* OQB. Ergo OQC (b) *rectus est*, ac *proinde angulo* LQC *per constr. recto æquatur*, l. 1. pars *toti*. Quod est *absurdum*. (b) *Per def.* 14. l. 1.

Corollarium.

EX demonstratis patet, si in circulo *recta* (LF) *aliam* (BC) *bisariam & perpendiculariter secat*, in *secante esse centrum*.

Facillime per *normam* *invenitur centrum*; *vertice* Q *ad* Fig. 2. *circumferentiam applicato*. Si enim *recta* DE *jungens puncta* D &

D & E, quibus normæ latera peripheriam secant, bisecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

SI in circuli ambitu duo puncta sumantur (B, C;) recta quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.

Accipiatur in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam (a) anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC (b) major est interno B, major erit quoque quam C. In triangulo igitur OAC, latus AC subtendens majorem angulum AOC, majus est (c) latere AO subtendente minorem C. Cum igitur AC tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum.

(a) Per 5.
l. 1.
(b) Per cor.
2. p. 32. l. 1.
(c) Per 19.
l. 1.

Ex ipsa etiam notione lineæ rectæ & circularis, propositio est manifesta.

Cor. Hinc sequitur rectam quamvis lineam circulum tangentem, in unico puncto eundem tangere. Si enim circumferentie puncta duo tangeret, esset recta linea per duo circuli puncta ducta, atque adeo (d) intra circulum caderet, contra tangentis definitionem. Et simili ratiocinio (a planis ad solida transeundo) probari posset planum quodvis sphaeram in unico puncto tangere.

(d) Per hanc prop.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam secet bifariam (in O,) secabit quoque perpendiculariter. Et si secet perpendiculariter, secabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z sibi mutuo æquilatera sunt: Nam CO, FO ex hypothese, & AC, AF quia ex centro, æquales sunt; AO vero communis est. Ergo (e) anguli AOC, AOF æquales. Ergo (f) recti. Quod erat primum.

(e) Per 8.
l. 1.

(f) Per def.
24. l. 1.

(g) Per 47.
l. 1.

(h) Per axio.
15.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF sunt recti, erit quad. AC (g) æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia (h) sint, etiam duo simul AO, CO duobus simul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO sunt æquales. Quod erat alterum.

[Cor. 1.

[Cor. 1. Dimidium chordæ angulum quemvis ad centrum subtendentis, est semissis anguli istius sinus rectus. Chordæ CF anguli ad centrum CAF, perpendicularis a centro ducatur AO. In triangulis X, Z, erunt CO, FO (a) æquales, AO communis, (a) Per hanc & anguli ad O recti. Ergo anguli CAO, FAO æquales (b) ^{prop.} erunt. Quare angulus CAO semissis erit anguli CAF, & (b) Per 4. l. 1. recta CO dimidium chordæ CF. Sed CO est sinus (c) rectus (c) Per def. anguli CAO. Ergo dimidium chordæ, angulum quemvis ad 10. l. 3. centrum subtendentis, est semissis anguli istius sinus rectus.

Cor. 2. Si trianguli cujuscvis æquilateri, aut etiam tantum Isoscelis ACF sumatur vertex A pro circuli centro, & alterum æqualium crurum AC pro radio, circulus transibit (d) Per def. etiam per F: atque inde, vi hujus prop. si recta AO a vertice 18. 19. & trianguli isoscelis bisecet basem, ei quoque perpendicularis erit; 26. l. 1. & si basi fuerit perpendicularis, eam bisecabit. Et inde etiam deduci possent ceteræ proprietates quæ in Schol. p. 26. l. 1. aliunde derivantur.

Scholium. Si a vertice trianguli Isoscelis ABC ad quodvis Fig. 4. punctum basis recta linea ducatur; erit quadratum ductæ rectæ una cum rectangulo sub segmentis basis, æquale quadrato lateris AB vel AC. Nam recta a vertice A ducta, vel erit basis BC perpendicularis, vel non. Sit primo ducta recta AD perpendicularis basi; erit BD = (e) DC, & proinde rectang. BDC (e) Per cor. = BDq, vel DCq. Sed ADq + BDq = (f) ABq; hoc est, 2. hujus. ADq + rect. BDC = ABq. Q. E. D. (f) Per 47. l. 1. Sed recta ducta sit AE, non perpendicularis basi, & ducatur perpendicularis AD, quæ basim in D (g) bisecabit. Cum (g) Per cor. igitur recta BC sit bifariam secta in D & non bifariam in E, 2. hujus. (h) erit rectang. BEC + EDq = BDq. Adde utrinque DAq, & (h) Per 5. l. 2. rect. BEC + EDq + DAq = BDq + DAq. Sed EDq + (i) Per 47. DAq = (i) AEq. & BDq + DAq = (k) ABq. Ergo rect. l. 1. BEC + AEq = ABq. Q. E. D.] (k) Per cand.

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (BC, FL) non amba Fig. 5. & 6. per centrum ductæ, se secant, non secabunt se mutuo bifariam.

Nam si una LF transeat per centrum, patet hanc non Fig. 6. bisecari ab altera BC, quæ ex hyp. per centrum A non transit.

Si neutra per centrum transit, ex A centro duc AO. Si Fig. 5. jam ambæ BC, FL forent bisectæ in O, anguli quoque AOC AOL essent (l) recti, ac proinde æquales, totum & pars. (l) Per Quod fieri non potest. PRO. præc.

PROPOSITIO V. & VI.

Fig. 7. & 8. **C**irculi se mutuo secantes, aut interius tangentes, non habent idem centrum.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, essent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ sunt æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 9.

SI in circulo, quodvis aliud a centro (A) accipiat punctum (C,) ex quo rectæ plures (CB, CL, CO, CF) in circumferentiam cadant;

1. Maxima erit (CB) quæ per centrum transit.
2. Reliqua diametri pars (CF) minima.
3. Aliarum vero major est ea, quæ maximæ (CB) propior.
4. Neque plures quam duæ ex dicto puncto (C,) quod a centro diversum est, ad circumferentiam duci possunt æquales.

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales sunt, addita communi AC, erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC sunt majores (a) quam LC. Ergo etiam BC major est quam LC. Eodem modo BC ostendetur major quavis alia.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc est, AF) est minor (b) quam AC, CO. Ablata igitur communi AC, remanet FC minor quam CO. Eodem modo erit CF minor quavis alia.

Pars 3. In triangulis COA, CLA, latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC; angulus vero LAC major est angulo OAC. Ergo (c) basis LC major basi OC.

(c) Per 24. l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam si tres duci possent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter se æquales. Quod repugnat parti 3.

Coroll. Simili plane ratiocinio cum Theodosio colligimus, Arcuum circulorum maximorum, a puncto quovis a circuli dati polo diverso, in superficie sphaera ad circumulum istum ductorum, maximum esse eum qui per circuli polum transit; minimum qui ad punctum

punctum oppositum dati circuli ducitur; reliquorum vero eum esse majorem qui maximo est propior: duos vero solum inter se æquales ab eodem puncto ad circulum duci posse. Neque aliter de plerisque hujus libri propositionibus Lector per se ratiocinabitur. A planis enim ad solida in hisce rebus transire est sane facillimum.

PROPOSITIO VIII.

SI a puncto extra circulum accepto (*A*) ad cir- Fig. 10. &
culum ducantur plures rectæ (*AB*, *AC*, *AF*; ^{11.}
AO, *AQ*, *AR*;)

1. Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima est (*AB*) transiens per centrum (*Z*.)

2. Aliarum major est ea, quæ maxima (*AB*) propior.

3. Extra circulum minima est (*AO*) quæ præducta per centrum transit.

4. Quæ minime propior, minor est remotiore.

5. Non plures quam duæ ex dicto puncto (*A*) in peripheriam duci possunt æquales, sive intra circulum, sive extra.

Pars 1. Ex centro *Z* duc *ZC*. Quia æquantur *ZC*, *ZB*; Fig. 10. addita communi *AZ*, erunt *AZ*, *ZC* ipsi *AB* æquales. Sed *AZ*, *ZC* majores sunt (*a*) quam *AC*. Ergo etiam *AB* major (*a*) Per 10. *AC*. Eodem modo erit *AB* major quavis alia. l. 1.

Pars 2. Duc *ZF*. Latera *CZ*, *ZA* æquantur lateribus *FZ*, *ZA*. Angulus vero *CZA* major est angulo *FZA*. Ergo (*b*) basis *CA* major basi *FA*. (b) Per 24. l. 1.

Pars 3. Duc *ZQ*. Duæ *AQ*, *QZ* majores (*c*) sunt quam Fig. 11. *AZ*. Ablatis igitur æqualibus *ZQ*, *ZO*, remanet *AO* minor (*c*) Per 20. quam *AQ*. Eodem modo *AO* minor erit quavis alia. l. 1.

Pars 4. Duc *ZR*. Rectæ *AQ* & *QZ* minores sunt (*d*) (d) Per 21. quam *AR*, *RZ*. Ablatis ergo æqualibus *ZQ*, *ZR*, remanet l. 1. *AQ* minor quam *AR*.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto (*A*) plures Fig. 12.
quam duæ æquales ad ambitum duci possint;
Id punctum centrum erit.

Patet ex 4. parte prop. 7.

F

PRO.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. **C**irculi in duobus tantum punctis se mutuo secant.

Secent enim, si fieri potest, in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ sunt tres æquales ad ejus peripheriam, (a) Per prac. AB, AC, AF, erit A (a) centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS se secantes habent idem centrum, quod repugnat propositioni 5.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14. **S**I duo circuli se intus tangant; recta per eorum centra (A & I) ducta transibit per contactum (B.)

Si negas, habeant, si fieri potest, centra eum situm, ut recta per illa transiens, cadat extra contactum B, secans circulos in O & L, sintque centra ipsa A & C; ac jungat AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, addita communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed (b) AC, CB sunt majores quam AB; Hoc est (c) quam AL. (b) Per 20. l. 1. AC, CB sunt majores quam AB; Hoc est (c) quam AL. (c) Per def. Ergo etiam AO major est quam AL, pars toto. Quod est absurdum. circuli.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. **S**I circuli se tangant exterius; recta conjungens centra, per contactum transibit.

Si negas, sint, si fieri potest, centra, ita posita, puta in A & B, ut recta per ipsa transiens, per contactum S non incedat, sed circulos secet in O & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur (d) AS, SB majores quam AB. Sed AS (e) est par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ sunt majores quam tota AB, pars toto. Quod fieri non potest. (d) Per 20. l. 1. AS, SB majores quam AB. Sed AS (e) est par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ sunt majores quam tota AB, pars toto. Quod fieri non potest. circuli.

[Coroll. ad duas præced. Si duo circuli se tangant vel interius vel exterius; recta a centro unius per contactum ducta, transibit

transibit per centrum alterius. Ejusmodi enim recta non differet a recta per eorum centra ducta, quæ per hæcce propp. 11 & 12. transibit per contactum.]

PROPOSITIO XIII.

Circuli & sese mutuo, & lineam rectam punctum aliter tangunt. Fig. 16. & 17.

Tangant enim se intra (si fieri potest) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A & B ducta recta (a) transibit per contactum, puta in C. Ducantur insuper AL, BL. Quoniam igitur (b) BL, BC æquantur, (sunt enim ex centro B ad peripheriam OLC,) addita communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC est par AL, (sunt enim ex centro A ad peripheriam QLC. Ergo etiam AB, BL sunt æquales AL, contra 20. l. 1.

Tangant se deinde exterius duo circuli, si fieri potest, in arcu OL. Recta AP centra A & P jungens (c) transibit per contactum, puta in O. Ducantur insuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipsis, AO, PO, seu toti AP. Contra 20. l. 1.

Denique recta BF & circulus se tangant, si fieri potest, in parte aliqua CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE est Isosceles. Quare (d) anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF, ducta ex A centro, cadet inter (e) C & E, puta in D. Erunt igitur tam AC, quam AE æquales perpendiculari AD, quod est absurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1.

Corollarium.

Circuli qui habent centra in una recta, eamque secant in eodem puncto B, se mutuo in puncto illo B contingunt. Fig. 18.

Cæterum hæc propositio liquet etiam ex notione ipsa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diversæ curvaturæ, aut duæ convexæ, secundum ullam sui partem possunt congruere. Congruerent autem, si se invicem in tota parte aliqua tangerent.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 19. **I**N circulo *aequales rectae* (*BC, LF*) *aequaliter a centro distant* : & *quae distant a centro aequaliter, sunt aequales.*

Ex centro A ducantur AC, AF; item AO, AI ad angulos rectos ipsis BC, FL. Erunt (a) BC, FL bisectae in O & I.

Cum ergo totae BC, FL ponantur aequales, etiam dimidia OC, IF, adeoque & (b) quadrata ipsarum aequantur. Jam vero quad. AC (c) aequale est quadratis OC, OA: & quadratum AF aequatur quadratis IF, IA. Cum igitur quadrata AC, AF (d) aequalia sint, etiam duo quadrata OC, OA, duobus IF, IA aequalia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quae ante ostensa sunt aequalia,) quae remanent, quad. OA, IA, aequalia erunt. Ergo etiam perpendiculares OA, IA sunt (e) aequales. Ergo BC, FL aequales, a centro distant (f) aequaliter. Quod erat primum.

E converso, si distantiae OA, IA ponantur aequales, tunc ablatis quadratis rectarum aequalium OA, IA, eodem discursu ostendetur quadrata reliqua OC, IF fore aequalia, ac proinde & rectas OC, IF aequales esse, quae cum sint (g) semisses rectarum BC, FL, etiam illae aequales erunt. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 20. **R**ectarum circulo inscriptarum maxima est diameter. Caterarum ea major, quae centro propior.

Sit quavis RS alia à diametro FL. Ex centro duc AR, AS. Dux AR, AS aequantur diametro FL, & sunt (h) majores quam RS. Ergo, &c.

Sit deinde BI propior centro quam XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ (i) major quam AC. Accipe ergo AO parem AC, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quae (k) par erit BI; junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum est, erunt latera AR, AS aequalia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS, major est angulo XAZ. Ergo basis RS, hoc est BI major (l) est basi XZ. Quod erat demonstrandum.

(h) Per 20. l. 1.

(i) Per defin. 4. l. 3.

(k) Per prac. l. 1.

(l) Per 24. l. 1.

P R O.

PROPOSITIO XVI.

Recta (IF) quæ per (B) extremitatem diame- Fig. 21.
tri (CB) perpendicularis est, tota cadit extra
circulum, eumque tangit (in B:) Neque inter ipsam
& circulum alia recta ad contactum (B) duci potest,
quin circulum secet.

Pars 1. Accipiat in recta IBF quodvis punctum L, ad
quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quo-
niam angulus ABL rectus est per hyp. erit ALB (a) acutus. (a) Per cor.
Ergo AL opposita majori angulo ABL, major est (b) quam 5. p. 32. l. 1.
AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantum pertin- (b) Per 19.
git ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam l. 1.
porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum est. [Idem
ostendetur de quovis alio puncto rectæ IF, à B diverso. Quare,
cum recta IF ita circulo occurrat in unico puncto B, ut eum
non secet,] Tota igitur IF extra circulum cadit, [eumque
tangit (c) in B.] Quod erat primum. (c) Per def.

Pars 2. Infra BF (si fieri potest) cadat RB tota extra 2. l. 3.
circulum. Quoniam FBA rectus est per hyp. erit RBA a-
cutus, ac proinde AB non est perpendicularis ad BR. Du-
catur igitur ex A centro ad BR, perpendicularis AO, quæ (d) Per cor.
cadet (d) versus R, & secabit circulum in Q. Igitur AB op- 3. p. 32. l. 1.
posita majori angulo, nempe AOB recto, major est quam AO
quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par est
AQ: Ergo etiam AQ major est quam AO, pars toto.

[Euclides hanc propositionem sic effert:

1. Recta IF, diametro circuli CB ad rectos angulos ab
extremitate ducta, cadit extra circulum: 2. & in locum
qui inter rectam lineam FB & circumferentiam QB inter-
jicitur, altera recta linea RB non cadet: 3. & semicirculi
angulus ABQ major est quovis angulo rectilineo acuto; re-
liquus autem QBF minor.

Partem primam & secundam jam demonstravit Tacquetus;
reliquas duas pro paradoxis male fundatis rejecit, haud recte
quidem, ut mihi videtur. Si enim dari posset angulus qui-
vis rectilineus acutus ABR, (angulo scil. recto ABF minor,)
qui tamen major esset angulo semicirculi ABQ; vel si quisvis
angulus rectilineus FBR dari posset, inter tangentem FB & cir-
culum QB, ad punctum B constitutus, sequeretur rectam inter
tangentem & circulum duci posse quæ tamen circulum non
secet, contra partem secundam.]

Corollaria.

Fig. 21.

Hinc rursus patet contactum rectæ lineæ & circularis esse punctualem.

Fig. 18.

2. Si centris in eadem linea recta in infinitum protracta acceptis, describantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quacunque data majorem excrecentes, propius semper ac propius in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in unico contactus puncto conjunguntur: quod quamvis evidentissimum sit, est tamen revera admirabile.

Fig. 18.

4. Ex his manifestum est, lineam quancunque in infinitum esse divisibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in recta BA sine termino producta, rectam IF per coroll. 2. hic, & se mutuo per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nusquam vel inter se, vel cum recta IF conjunguntur præterquam in B. Ergo necesse est ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc est, in non tot quin plures.

Fig. 21.

5. Angulum contingentiae seu contactus LBQ (eum nempe qui tangente & peripheria continetur) nulla recta linea potest dividere.

Fig. 18.

6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes secari potest ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum mysterium asymptoticum, hoc est, lineæ rectæ ad Hyperbolam una secum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclare observavit & demonstravit Marius Bettinus noster in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyse Narbonensi, cujus demonstrationem refert Cardanus de subtilitate, lib. 16.

Fig. 18.

[*Angulus contactus (uti vulgo appellatur,) per circumferentias in eodem puncto tangentes non minuitur, utpote qui nullus est, vel non quantus, seu non-angulus. (Vide Wallis. de angulo contactus.) Angulus enim (per def. 8. l. 1.) est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio: recta autem QI circumferentiam unam vel plures in unico puncto B contingens, in ipso contactus puncto, (illic enim, si quis sit, existit angulus,) non inclinatur ad illas circumferentias, sed cum iis prorsus coincidit.*

Hoc

Hoc igitur corollarium sextum, quatenus verum est, non differt a tertio. Hinc autem sequitur.

7. Angulum semicirculi ABQ esse angulo recto rectilineo ABF aequalem. Si enim locus iste QBF qui inter circum-
ferentiam & tangentem interjicitur, ad punctum B sit non-angulus, sive non-quantus; eo igitur ab ABF ablato, angulus rectus non minuitur; ac proinde angulus semicirculi ABQ adhuc manet rectus. Fig. 21.

Ceterum questionem in Scholio subsequente agitatam, longe accuratius tractat Celeberr. Wallisius, operum Mathematicorum volum. 2do, (in sua de angulo contactus & semicirculi disquisitione Geometrica, pag. 605 — 630, ejusque defensione, pag. 631 — 664.) quo itaque lector qui hisce oblectatur est remittendus. Tyrones interim, omisso hoc Scholio, ad prop. 17, & seqq. cum aliquo temporis operaque compendio transibunt.]

Scholium.

Demonstratur & solvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci solent.

ATque hæc quidem ex 16. prop. hætenus deducta, & mira & certa sunt. Quæ vero deduci ex eadem solent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare suspicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio subtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet. Et plane, quod suspicatus sum, ita se habere, mihi tandem videor deprehendisse. Paradoxa quæ ex 16. inferri solent; ex aliis multis, hæc fere præcipua sunt.

1. Angulus contingentiae (OAC) omni acuto minor est. Fig. 22.
Acutus esto PAC . Ab hoc auferri potest dimidius, & a residuo iterum dimidius, & sic deinceps sine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor. Quamtumvis enim in infinitum minuatur, semper tamen residui anguli, exempli gr. anguli QAC latus unum QA (a) intra circum-
ferentiam (a) Per 16
cadet, ac proinde angulus contactus OAC intra acutum con-
tinebitur, ejusque pars erit, ideoque illo minor. l. 3.

2. Angulus semicirculi (BAO) licet recto minor sit, est omni acuto major. Quia ob eandem causam, acutus quantumvis magnus BAQ , intra semicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipso textu propositionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea sint, an ab aliquo adjecta. Apollonius certe, magnus Geometra, cum eandem affectio-

nem in ellipsi, hyperbola & parabola demonstrat, has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus CAB (imo acutus quicumque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo est major. Nam angulus CAB dividi potest in acutos infinitos minores semper & minores, quorum nihilominus singuli sunt majores (a) angulo contactus OAC.

(a) Per paradox. 1.

4. Angulus contactus CAO est vera pars anguli recti CAB; eundem quippe una cum semicirculi angulo OAB constituit; nequit tamen ulla sui multiplicatione suum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia sibi addita non efficiunt infinitum.

5. Transitur a minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: sive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam si recta AB, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, describet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios possibiles, qui quamvis semper augeantur, semper tamen erunt minores (b) semicirculi angulo BAO, quam primum vero AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo semicirculi.

(b) Per paradox. 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. propositione deduci solent: quæ profecto, si ita, ut proponuntur, sese habeant; merito incomprehensibilia videri possent. Peletarius, ut his paradoxis se expediat, negat angulum contactus esse quantum. Rem confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cum inde infert omnes semicirculi angulos esse æquales, quod plane non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo asseverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio nostro in sua illa adversus Peletarium apologetica disputatione assentior. Mea quidem sententia uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem; ille dum omnes præter angulum contingentiam. Alii se existimant hac una responsione omnes difficultates solvere, si dicant, curvilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati vero, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactus quantumcumque multiplicatus, nunquam potest æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirum fieri possit, ut angulus contactus anguli recti pars sit, & tamen quotiescumque multiplicatus eundem superare nequeat. Respondent angulum contactus non esse partem recti, quia eum non potest adæquare. At paradoxorum assertores replicant, hinc solum sequi non esse partem recti aliquotam; veram tamen esse partem,

partem, eo quod cum semicirculari angulo rectam componat. Unde qui hac via difficultates propositas volebant dissolvere, debuerant ostendere angulum contactus nullo sensu partem esse rectilinei anguli, neque addito sibi semicirculari angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidea definitione anguli pendere. *Def. 8. l. 1.* Hæc enim, si penitus expendatur, manifeste docet nullum angulum esse quantum, quo uno errore sublato, paradoxa omnia evanescunt. Sentio igitur:

1. Nullus angulus est quantitas, sed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus est duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non est quantitas, sed modus quantitatis. Cum enim curvitas non sit quantitas; cur inclinatio sit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde; Si angulus esset quantus, foret vel linea, vel superficies, vel corpus. Non esse lineam aut corpus patet. Sed neque superficies est: ea enim, ablatione partium C, B, minuitur; *Fig. 23.* non angulus. Neque potest dici angulum esse superficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus sit.

2. Quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quanti, eorum inter se comparatorum relatio, non est æqualitas & inæqualitas, sed similitudo & dissimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter se comparati æquales dicantur aut inæquales, non aliud intelligi potest, quam eos similes esse inter se aut dissimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere, ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera superimposita congruunt; dissimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil est aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo similes anguli sunt inclinationes linearum similes. Non sunt autem inclinationes linearum similes, nisi ambæ sibi mutuo impositæ congruant. Ergo similes anguli sunt, quorum congruunt latera; dissimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifestum est, nullum angulum curvilineum, æqualem dari posse ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud est quam similitudo, per conclus. 2. & 3. Similitudo angulorum est sola laterum congruentia, per conclusionem. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum descriptis æqualibus semicirculis, ita ratiocinatur:

Fig. 24.

tiocinatur: æqualium semicirculorum anguli EAD, CAB æquales sunt. Ergo si his addatur communis angulus CAD, erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma, si æqualibus addas vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas solum pertinet: anguli porro quanti non sunt. Axioma ut in angulis valeat, ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, si opponantur similibus angulis, similiterque positis; qui tum orientur, erunt similes. At Proclus comparat angulos similes quidem: sed communis, qui utrisque additur, cum ab una parte habeat latus rectum, ab altera curvum, dissimiliter utrisque additur.

6. Quare cum tota essentia anguli sit linearum se tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius; una siquidem inclinatio pars alterius inclinationis non est: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio siquidem una auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non sunt, sed superficiebus inter latera constitutis conveniunt.

7. Postremo ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ passim, atque ipse in primis Euclides, utuntur, cum angulos secari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque similia asserunt. Hæc sane existimabimus eos non proprie, sed analogice tantum angulis tribuere; itaque eos loqui voluisse, quod id commodius, & expeditius esset, neque tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneat.

Fig. 25.

Angulum itaque dividi recta DA, non aliud erit, quam inter latera EA, CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc est duos novos angulos efficiat. Angulum vero EAC esse duplum anguli EAD, nihil rursus aliud erit, quam inter lineas rectas EA, CA, aliam interponi, quæ ad utramque similiter inclinetur; unde fiat ut rectæ EA, DA rectis CA, DA, inclinationibus non mutatis, impositæ congruant. Quod si ita ratiocinentur: (Angulus EAD est æqualis angulo ILQ, & DAC est æqualis QLR; ergo totus EAC toti ILR æqualis est:) Idem erit, ac si dicatur; Inclinatio rectarum EAD similis, seu eadem est inclinationi rectarum ILQ; & inclinatio rectarum DAC similis est inclinationi rectarum QLR: Ergo etiam inclinatio rectarum EAC similis erit inclinationi rectarum ILR. Vel certe (quod recidet in idem, ex assertionem 4. supra) collectionem illam sic intellige: latera EAD congruunt lateribus ILQ; & latera DAC congruunt lateribus QLR: Ergo latera quoque EAC congruunt lateribus

Fig. 25. &
26.

ribus ILR. Quæ quidem consecutio æque clara est, atque si æqualibus addas æqualia, tota æqualia esse. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum sint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique salva, interpretabimur.

His ita constitutis, facile paradoxa angularia dissolvemus; quæ sane non aliunde enata sunt, quam quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur simul omnia expediam; Dico paradoxa illa, si in proprio verborum sensu accipiantur, ad unum omnia esse falsa. Sic enim accepta non convenient nisi quanto: anguli autem quanti non sunt, ut jam ostendimus.

Itaque angulus contactus neque minor est quovis acuto, neque pars est anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imo ne semel quidem; nihil enim horum, linearum inclinationi potest competere, quæ tota anguli essentia est. Si vero non proprie, sed analogice accipiantur, jam nihil continent, quod a communi sensu ac ratione *Fig. 22.* alienum sit. Sic enim, angulum contactus OAC esse minorem quovis acuto, & semicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud significabit, quam infra tangentem CA, nullam posse duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas est omnino digna, quam homines admirentur, est tamen ejusmodi quam possimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxii tertii, quarti & quinti sensus erit. Atque ita unius Euclidæ definitionis ductu, rite perspecta natura anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evanescent.

PROPOSITIO XVII.

A *Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum *Fig. 27.*
circulum (OQ) tangat.*

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB, secans peripheriam in O. Centro A describe per B alium circulum, BC, & ex O duc OC perpendicularem ad AB, quæ occurrat circulo BC in C. Duc CA, occurrentem circulo OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, angulusque A communis est in trigonis IAB, OAC, etiam *(a) Per 4. l. 1.*
(b) Per con-
str. (a) anguli AOC, AIB æquales sunt. Sed (b) AOC rectus est. Ergo etiam rectus est AIB. Ergo BI *(c) (c) Per 16.*
tangit in I. *Scholium. l. 3.*

Scholium.

Fig. 28.

EX 31. seq. pulchre ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)

Centrum A & datum punctum O jungens recta bisecetur in P. Tum centro P, per A & O describe circulum occurrentem dato in B. Recta OB tanget.

Nam juncta AB, angulus ABO in semicirculo rectus est, per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 29.

SI circulum tangat recta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis est.

Si negas, sit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta AF: (a) secabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit (b) ABF acutus. Ergo AB, (hoc est AO) major (c) quam AF, pars toto.

(b) Per cor.

§. p. 32. l. 1.

(c) Per 19.

l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 30.

SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI,) erit in ea centrum.

Si negas, sit centrum extra AI in Z, & ab eo ad contactum ducatur ZA. Erit (d) angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. recto; hoc est, pars toti.

(d) Per præc.

PROPOSITIO XX.

Fig. 31, 32, 33.

Angulus ad centrum (BAC) duplus est anguli (BFC) ad peripheriam, cum idem arcus (BC) est basis angulorum.

Fig. 31.

Triplex est casus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum vero quia AF, AC ex centro ductæ æquantur, (e) Per §. l. ducta FC, erunt in triangulo Z anguli F & C (e) æquales.

1.

Sed

Sed BAC (a) æqualis est duobus F & C. Ergo BAC du. (a) Per 32.
plus est unius F. l. 1.

In casu secundo BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum vero ducta FAX, per casum primum XAB est duplus XFB, & XAC duplus XFC. (b) Ergo totus BAC duplus est totus BFC. (b) Per 12.
l. 5. quæ ab hac non dependet.

[Sit XAB angulus graduum 6: (c) erit angulus XFB graduum 3. Sit porro ang. XAC gr. 4: (d) erit XFC gr. 2. Ergo XAB + XAC erit gr. 6 + 4 = gr. 10 = BAC; & XFB + XFC = gr. 3 + 2 = gr. 5 = BFC. Denarius autem graduum numerus est quinarium duplus: ergo & angulus BAC duplus est anguli BFC.] (c) Per cas. 1. (d) Per eund.

In tertio casu BF iecat AC, & anguli BAC, BFC sunt extra invicem. Ducatur FAL. Per casum 1. totus LAC duplus est totius LFC, & ablatas LAB duplus est ablati LFB. Ergo (e) & reliquus BAC duplus est reliqui BFC. Quod erat demonstrandum. (e) Per 19.
l. 5. quæ ab hac non dependet.

[Sit LAC gr. 12, LAB gr. 2. (f) Erunt LFC gr. 6, LFB gr. 1. Ergo LAC - LAB = gr. 12 - 2 = gr. 10 = BAC; & LFC - LFB = gr. 6 - 1 = gr. 5 = BFC. Ergo angulus BAC duplus est anguli BFC.] (f) Per cas. 1.

PROPOSITIO XXI.

Anguli (BQC, BFC,) qui in circulo insistant eidem arcui (BOC,) sive qui in eodem segmento (BQSC) existunt, inter se omnes sunt æquales. Fig. 34.

Sit primo segmentum BQSC majus semicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus est singulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC sunt æquales. Quod erat demonstrandum. (g) Per axio. 6.

Sit deinde segmentum BQC æquale aut minus semicirculo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem I oppositi, æquales sunt, etiam summa reliquorum Q & R summæ reliquorum F & O æqualis erit. Quare si ab his æqualibus summis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales sunt, utpote eidem arcui QF insistentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonstrandum. (h) Per 15.
l. 1. (i) Per cor. 10. p. 32. l. 1.

Coroll. Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubi vis in circuli, cujus chorda est, circumferentia posito ejusdem magnitudinis.

magnitudinis apparere; quia scilicet sub angulo aequali $B\hat{Q}C$ ubique apparet.

Fig. 34.

[Scholium. Si super arcu BOC insistant duo aequales anguli, quorum alter BFC ad peripheriam arcui BOC oppositam existat: Erit uterque angulus ad eandem peripheriam ipsi BOC oppositam; hoc est, angulus ipsi BFC aequalis, neque citra, neque ultra peripheriam cadet. Cadat enim, si fieri potest, citra peripheriam ad punctum I intra circulum, angulus BIC aequalis angulo BFC ad peripheriam existenti; & producat IC donec occurrat peripheria in Q , & ducatur BQ . Anguli $B\hat{Q}C$, BFC in eodem segmento existentes, per hanc prop. erunt aequales: Sed & BIC , BFC aequales esse supponuntur; Ergo BIC (externus angulus trianguli BIQ) aequalis est uni interiorum oppositorum, nempe angulo $B\hat{Q}I$, contra cor. 1. pr. 32. l. 1. Non igitur cadit intra circulum vel citra peripheriam angulus angulo BFC aequalis. Sed neque extra circulum, vel ultra peripheriam: si enim extra, ut in E cadere supponatur; a puncto Q ubi recta CE peripheriam secat, ducatur recta QE : erit ut prius, angulus $B\hat{Q}C$ (a) angulo BFC , ac proinde (b) angulo BEC aequalis, rursus contra idem corollarium, cum $B\hat{Q}C$ sit angulus externus, & BEQ unus interiorum oppositorum trianguli BQE . Cum igitur angulus ipsi BFC ad peripheriam existenti aequalis, neque cadat ultra peripheriam neque citra, erit angulus ad peripheriam. $Q. E. D.$

(a) Per hanc
prop.
(b) Per hy-
poth.

Fig. 35.

Eodem modo, si segmentum $B\hat{Q}FC$ sit semicirculo aequale, vel minus, ostendetur angulum angulo BFC aequalem, neque citra, neque ultra peripheriam $B\hat{Q}FC$ cadere.]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 36.

Quadrilateri circulo inscripti ($ABCF$) oppositi anguli duos rectos conficiunt.

Ducantur BF , CA . Angulus ABC , cum duobus O & X (c) Per 32. facit (c) duos rectos. Sed O est (d) æqualis I , quia insistant eidem arcui BC ; & X (e) est æqualis Z , quia insistant eidem arcui AB . Ergo ABC , cum duobus etiam, I , Z , hoc est, cum toto opposito angulo AFC , facit duos rectos. Quod erat demonstrandum. [Et pari modo ostendetur angulos oppositos BAF , BCF duobus rectis aequales esse.]

(c) Per 32.
l. 1.
(d) Per 21.
l. 3.
(e) Per cand.

Coroll. (1.) Hinc si unum latus quadrilateri in circulo descripti producat, erit angulus externus aequalis angulo quadrilateri opposito: internus enim utriusvis additus duos rectos angulos (f) conficit.

(f) Per hanc,
& 13. l. 1.

2. Item

(2.) Item circa Rhombum aut Rhomboidem circulus describi nequit; quia aduersi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

Non sunt necessaria: & agitur de segmentis semilibus, quæ non possunt sine proportionibus recte definiri. [Siquis tamen has propositiones desideret, inter corollaria ad prop. ult. lib. 6. eas inveniet.]

PROPOSITIO XXV.

Datum arcum (ABC) perficere.

Fig. 37.

Subtendantur utcumque duæ rectæ AB , CB , quas biseca in I & L . Ex I & L duc perpendiculares sibi occurrentes in puncto O . Hoc erit centrum circuli, cujus portio est arcus ABC .

Nam (a) centrum est & in recta IX , & in recta LZ . (a) Per cor. p. 1. l. 3.

Ergo in communi ipsis puncto O .
Praxis. Centro B sumpto in arcu, describe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, describe duos alios circulos quorum singuli priorem bis secant. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuo occurrentes in O (b) dant centrum. (b) Per prax. pr. 10. l. 1. & cor. pr. 1. l. 3.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

In circulis equalibus, [vel in uno eodemque circulo,] rectæ æquales (CE , FI) subtendunt arcus æquales; & si arcus sunt æquales, etiam subtensæ æquales erunt. Fig. 38.

Pars 1. Ad centra A & B ducantur CA , EA , FB , IB . [Rectæ illæ erunt sibi mutuo (c) æquales, utpote quæ sint ejusdem circuli, vel equalium circularum radii.] Quia triangula CAE , FBI sibi mutuo æquilatera sunt, etiam erunt sibi mutuo (d) æquiangula. Ergo cum circuli sibi mutuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE , l. 1. ac

ac proinde centrum B incidit in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cum igitur circuli sint æquales, etiam arcus FLI necessario congruet arcui CQE, & arcus FOI

(a) *Per axio.* arcui CSE, ac proinde æquales (a) erunt etiam ipsi.

7. Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE

(b) *Per axio.* ponuntur æquales, sibi mutuo impositi (b) congruent, pun-

8. ctæque F, I incident in puncta C, E. Ergo & subtensa FI

(c) *Per axio.* congruet subtensæ CE. Ergo FI, CE (c) æquales sunt.

7. [Coroll. In circulis æqualibus, vel in eodem, recta inæquales subtendunt arcus inæquales, major maiorem, minor minorem; & si arcus fuerint inæquales, etiam subtensa inæquales erunt.]

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 38.

SI in circulis æqualibus, [vel in eodem,] anguli sive ad centra (BAC, FLI) sive ad ambitum (BOC, FSI) sint æquales; etiam arcus (BXC, FZI) quibus insistant, sunt æquales: & si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt.

(d) *Per axio.* Pars 1. Quoniam latera AB, AC (d) æquantur LF, LI, 15. (sunt enim æqualium circulorum semidiametri,) & anguli

(e) *Per 4.* A, L ponuntur æquales; erunt bases (e) BC, FI æquales.

l. 1.

Ergo arcus BXC, FZI etiam (f) æquales sunt.

(f) *Per 26.*

l. 3.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales.

(g) *Per 20.*

l. 3.

Quia igitur (g) horum dupli sunt BAC, FLI, etiam illi æ-

l. 3.

quales erunt, ac proinde, ut jam ostensum, etiam arcus

(h) *Per axio.*

15.

BXC, FZI sunt æquales.

15.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27.

(i) *Per 8.*

l. 1.

æqualitas subtensarum BC, FI. Ergo quia etiam BA, AC

(k) *Per 20.*

l. 3.

(b) æquantur ipsis FL, LI, erunt (i) anguli A & L ad

l. 3.

centrum æquales: & quia (k) anguli O & S horum dimidii

l. 3.

sunt, erunt etiam ipsi æquales.

Fig. 40.

[Coroll. Linea recta EF, qua in A medio puncto peripheria alicujus BC circulum tangit, parallela est rectæ lineæ BC qua peripheriam illam subtendit. Duc enim e centro D ad contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. In triangulis BDG, CDG, latus DG commune est, & DB æquale DC, atque an-

(l) *Per 4.*

l. 1.

gulus BDA æqualis angulo GDA (ob arcus BA, CA æqua-

(m) *Per 18.*

l. 3.

les.) Ergo anguli (l) DGB, DGC æquales, & proinde recti

l. 3.

sunt. Sed interni anguli (m) GAE, GAF etiam recti sunt.

(n) *Per 29.*

l. 2.

Ergo (n) BC, EF sunt parallele. Q. E. D.]

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Datam arcum (ABC) bisecare.

Fig. 41.

Duc AC , quam biseca in O . Ex O perpendicularem duc OB , occurrentem arcui in B . Dico factum.

Jungantur enim AB , CB . Latera AO , OB per constr. æquantur lateribus CO , OB ; & anguli ad O sunt æquales, (a) *Per 4. l. 1.* quia recti. Ergo bases AB , BC (a) æquales. Ergo etiam (b) *Per 26. l. 3.* æquantur arcus AB , CB .

Praxis. Centris A & C describe pari intervallo arcus secantes in punctis F & I , per quæ, ducta recta arcum ABC (c) bisecabit.

Fig. 41.

(c) *Per hanc & praxin*

pr. 10. l. 1.

[Cor. Hinc sequitur, dimidium chordæ arcum quemvis subtendentis, esse semissis arcus istius sinum rectum; & vice versa, sinum rectum duplicatum, chordam esse dupli arcus. Huic omnino simile est cor. 1. p. 3. prius, de chorda angulum ad centrum subtendente.]

PROPOSITIO XXXI.

Angulus (BCF) in semicirculo, rectus est: in segmento majore minor recto; in segmento minore recto major. [Item angulus mixtilineus segmenti majoris est major recto, & angulus mixtilineus segmenti minoris est minor recto.]

Fig. 42, 43.

Pars 1. Ex centro A duc AC . Quia æquales sunt AB , AC , anguli O , B (d) æquales erunt. Ob eandem causam æquales erunt I , F . Ergo totus BCF utrique B & F æqualis est. Cum igitur (e) tres simul conficiant duos rectos; semissis trium, angulus BCF , unus rectus est.

Fig. 42.

(d) *Per 5. l. 1.*

(e) *Per 32. l. 1.*

Pars 2. Sit segmentum $LOBF$ semicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB . Angulus FOL minor est angulo BOL , qui per 1. partem rectus est. Ergo &c.

Fig. 43.

Pars 3. Esto segmentum LOX semicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL . Erit hic major quam BOL , qui rectus est. Ergo &c.

Fig. 43.

G

[Pars 4.]

Fig. 42.

[Pars 4. Sit recta BC communis segmentorum inaequalium basis: Erit angulus mixtilineus segmenti majoris BCF, recta BC & arcu CF comprehensus, angulo recto maior. Ducatur enim diameter BF, & juncta FC, erit angulus rectilineus BCF rectus per primam partem, & proinde angulus mixtilineus BCF, recta BC & arcu CF comprehensus, erit recto maior. Producat Fc ad E, & angulus BCE rectus erit (a), ac proinde angulus mixtilineus BCD segmenti minoris erit recto minor. Q. E. D.]

(a) Per def.
14. l. 1.

Quartam hanc propositionis 31. partem, ejusque demonstrationem a Tacqueto omissas, ex Euclide restituendas duximus.]

Fig. 2.

Corollarium (1.) Hinc Examen Norma, num exacte re-ctangula sit, instituitur. In circulo enim quocunque, posito ad circumferentie punctum quodcunque Q Normae vertice, si latera per diametri extrema D & E transeunt, angulus est rectus; Sin minus, haudquaquam.

Fig. 2.

(2.) [Si normae latera ad puncta D & E continuo adjuncta teneantur, interea dum angulus utrinque circumagatur, Vertex anguli Q describet circumferentiam circuli cujus diameter est linea DE.]

Fig. 42.

(3.) Hinc ab extrema linea perpendicularem excitare discimus. Sit BC linea à cujus puncto C perpendicularem oporteat excitare. A puncto quovis A tanquam centro describatur circulus, per punctum C transiens; & lineam BC intersecans in puncto B. Ducta diametro BF, & recta cF, liquet lineam CF esse lineam BC normalem. Q. E. F.

[(4.) In Triangulo rectangulo BCF, si hypotenusæ BF bifecetur in A, recta AC secabit triangulum in duo triangula æquicrura ACB, ACF: Et circulus centro A per B descriptus transibit per C, anguli recti verticem.

(5.) cum angulus mixtilineus segmenti majoris, sit angulo recto rectilineo (b) major, angulus autem mixtilineus segmenti minoris, sit angulo recto rectilineo minor; ergo angulus mixtilineus semicirculi erit angulo recto rectilineo aequalis: id quod

(c) Vide cor. etiam antea (c) ex alio principio demonstravimus.]

7. p. 16. l.

3.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 44. &
45.

SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem secet, erit angulus a tangente & secante factus, par angulo, qui sit in segmento alterno.

Nimirum

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in segmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in segmento AOB.

Transseat primo secans AB per centrum. Per 18. CAB rectus est. Et per 31. rectus est L. Ergo CAB & L æquales sunt.

Transseat deinde secans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in semicirculo rectus est, faciet BQA cum BAQ (a) rectum unum. Sed etiam CAQ rectus (b) est. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc (c) est L) æqualis CAB. Quod erat primum.

Deinde (d) FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL, anguli (e) oppositi L & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus simul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB inde L, quos jam ostendi æquales, erunt æquales reliqui FAB & O. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta (BC) segmentum circuli construe, capiens angulum dato parem.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C data rectæ BC, fac angulo CBL parem (f) BCI, cujus latus secabit BL in I. Centro I per B describe circulum; hic transibit per C, (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera CI, BI æqualia sunt,) capietque segmentum BQC angulum parem dato ABF.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis est, AB tanget (h) circulum, quem secat BC. Ergo (i) angulus in segmento BQC æquatur angulo ABF.

Quod si detur angulus obtusus RBC, eadem construe, eritque segmentum COB quæsitum.

[Scholium. Eadem omnino constructione, circuli circumferentiam ducere licebit, qui datam rectam AR in dato puncto B tangat, & per aliud punctum C, extra rectam AR sumptum transseat. Nempe ducta BC, & ad datam AR erecta perpendiculari BL, si fiat angulus BCI, angulo CBL æqualis; rectarum BL, CI intersectio I erit centrum, & IB vel IC radius circuli describendi.]

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 47. **A** Dato circulo segmentum auferre capiens angulum dato parem.

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC; (a) quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet segmentum AQC capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 48, 49. **S**I in circulo dua rectæ (CL, BF) se secuerint; rectangulum (COL) sub segmentis unius, æquale est rectangulo (BOF) sub segmentis alterius comprehenso.

+ vid. Eucl.

Si se interfecant in centro A, res patet.

Fig. 48.

(b) Per 3. Si una CL transit per centrum A, & reliquam BF secat bifariam; secabit quoque (b) perpendiculariter, ac proinde quad. FO est rectangulum FOB. Ducatur AF. Quoniam CL bisecta est in A, & aliter in O, erit

(c) Per 5.
l. 2.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. COL} \quad \text{Æ.} \quad (c) \text{ quad. AL; hoc est,} \\ \text{quad. AO} \end{array} \right.$

(d) Per 47.
l. 1.

$\left. \begin{array}{l} \text{quad. AF; hoc est, (d)} \\ \text{quad. AO} \\ \text{quad. FO.} \end{array} \right\}$

Dempto igitur communi quadrato AO, erit
rect. COL Æ. quad. FO, hoc est,
rect. FOB.

Fig. 49.

Si una CL per centrum transit, & reliquam BF secat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta secet ipsam BF in I bifariam. Igitur angulus AIB (e) rectus erit. Jam quia CL bisecta est in A & aliter in O, erit

(f) Per 5.
l. 2.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. COL} \quad \text{Æ.} \quad (f) \text{ quad. AL; hoc est,} \\ \text{cum} \\ \text{quad. AO} \end{array} \right.$

(g) Per 47.
l. 1.

$\left. \begin{array}{l} \text{quad. AB; hoc est, (g)} \\ \text{quad. AI} \\ \text{quad. BI.} \end{array} \right\}$

Sed

Sed quadratum AO æquatur (a) quadratis OI, AI. Ergo (a) Per 47

rectang. COL $\propto$ quad. AI }
 quad. OI quad. BI }
 quad. AI

Dempto igitur communi quadrato AI, remanent

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. COL} \\ \text{quad. OL} \end{array} \right. \quad \text{Æ.} \quad \text{quad. BI.}$$

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (b) FOB (b) Per s.
cum quadrato OI, quia FB secta est bifariam in & I aliter l. 2.
in O. Ergo

$$\left. \begin{array}{l} \text{rectang. CQL} \\ \text{quad. OI} \end{array} \right\} \text{Æ. rect. FOB} \left. \begin{array}{l} \text{quad. OI} \end{array} \right\}$$

Dempto igitur communi quadrato OI , erit

rect. COL $\mathcal{A}$. rect. FOB.

Quod si neutra rectarum CL, FB per centrum transeat, Fig. 50. per communem earum sectionem O & per centrum A, ducatur recta XZ. Per modo demonstrata tam rectang. COL quam rectang. FOB æquantur rectangulo ZOZ. Ergo etiam COL, FOB æqualia sunt inter se.

[*Vel sic facilius & universalius. Connecte CF & BL. At- Fig. 51.*
que ob angulos (c) COF, BOL ad verticem oppositos, ipsosque (c) Per 15.
(d) C & B (super eodem arcu FL) pares, trigona COF, BOL ^{l. 1.}
(e) aequiangula sunt. Ergo per prop. 4. lib. 6. que ab hac non ^{(d) Per 21.}
dependet, CO : OF :: BO : OL ; & proinde, per prop. 16. lib. ^{l. 3.}
6. que itidem ab hac minime dependet, rect. CO X OL = ^{(e) Per cor.}
rect. BO X OF. Q. E. D.] ^{9. p. 32. l. 1.}

PROPOSITIO XXXVI.

S*I a puncto (B) extra circulum dato ducantur Fig. 52, 53, duæ rectæ, una tangens (BF,) altera secans (BC;) erit rectangulum (CBO) sub tota secante (CB) & parte (BO) inter punctum & circulum interjecta comprehensum, æquale quadrato tangentis (BF.)*

Si secans BC transit per centrum A, jungat AF: faciet Fig. 52.
hæc (f) cum FB angulum rectum. Quoniam CO bisecta (f) Per 18.
est in A, eique adjecta OB, erit l. 3.

} rect. CBO (g) $\mathcal{A}$. quad. AB; hoc est, (h) (g) *Per* 6.
 } quad. AO l. 2.
 quad. BF } (h) *Per* 47.
 quad. AF. } l. 1.

G 3

Ablatis

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet
rect. CBO æ. quad. BF.

Fig. 53, 54. Quod si CB non transit per centrum A, ducantur AB, AF, AO; & AL ex centro ducta bifecet OC in L. Ergo

(a) Per 3. angulus ALO (a) rectus erit. Item AFB (b) erit rectus.

l. 3. Quoniam vero CO bisecta est in L, eique adjecta est OB,
(b) Per 18. erit

l. 3.

(c) Per 6. l.

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. CBO} \\ \text{quad. LO} \end{array} \right\} \quad \text{æ. (c) quad. LB.}$$

Addatur utrimque quadratum AL, erit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. CBO} \\ \text{quad. LO} \\ \text{quad. AL} \end{array} \right\} \quad \text{æ. quad. LB} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quad. AL} \\ \text{quad. AL} \end{array} \right\}$$

(d) Per 47. Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato (d) AO seu AF;
l. 1. & quadrata LB, AL (e) æquantur quadrato AB. Ergo

(e) Per eand.

(f) Per eand.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. CBO} \\ \text{quad. AF} \end{array} \right\} \quad \text{æ. quad. AB; hoc est, (f)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quad. BF} \\ \text{quad. AF} \end{array} \right\}$$

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet
rect. CBO æ. quad. BF.

Fig. 55. [Vel sic facilius & universalius. Duc CF & FO: ac ob
(g) Per 32. angulos BFO & (g) C pares, & B communem, triangula CBF,
l. 3. FBO (h) æquiangula sunt. Ergo per 4. l. 6. quæ ab hac
(h) Per cor. non dependet, CB: BF:: FB: BO. Quare per 17. l. 6. quæ
2. p. 32. l. 1. ab hac non dependet, rectangulum CB X BO æquale est qua-
drato BF. Q. E. D.]

Corollaria.

Fig. 56. 1. SI ab eodem extra circum puncto B, quotvis ducan-
tur secantes BC; omnia rectangula CBO inter se æqua-
lia sunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circum tangunt, BF, BQ
æquales sunt. Earum quippe quadrata æquantur singula
eidem rectangulo CBO.

[3. Perspicuum quoque est ab eodem puncto B extra circu-
lum assumpto, duci tantum posse duas lineas BF, BQ, quæ
circulum tangant. Nam si tertia tangere dicatur, erit illa
(k) Per cor. ipsæ BF & BQ (k) æqualis, & proinde ab una istarum non
2. diversa.

Fig. 57.

4. Iinc cum Maurolyco ex nota montis altitudine AD, &
linea horizontali AB terram tangente in B, ubi montis vertex,
ab illo recedentibus apparere desinit, Telluris diametrum DE
(in AD producta sumptam) metiri discimus. Erit enim, per
hanc prop. rectang. AEX AD = ABq. Dividatur ergo no-
tum

tum quadratum AB per notam montis altitudinem AD , & quotiens dabit rectam AE : ex qua subtrahe notam montis altitudinem AD ; reliqua erit DE Telluris diameter. $\mathcal{Q}$. E. I.

5. In omni triangulo rectangulo BFA , rectangulum ex hy-
potenusa & lateris unius summa, ac differentia, aequatur qua-
drato lateris alterius. Si enim centro A , & intervallo AF
describatur circulus, secans hypotenusam AB in O , & produ-
catur BA usque dum circulo rursus occurrat in C , Hypotenusa
 BA & lateris AF summa erit BC , a puncto B circulum se-
cans; eorumque differentia erit BO ea secantis pars qua inter
punctum & circulum interjicitur; & trianguli latus alterum
est BF circulum (a) tangens. Sed per hanc prop. rectangulum (a) Per 16.
 CBO aequatur quadrato BF : Ergo, in triangulo rectangulo
 BFA , &c. $\mathcal{Q}$. E. D.

6. Si ab angulo A trianguli ABC , cujus latera AB , AC Fig. 58, 59.
sunt inaequalia, demittatur in basem (si opus productam) per-
pendiculum AL ; erit rectangulum sub summa & differentia
laterum AB , AC , aequale rectangulo sub summa & differen-
tia rectarum LB , LC , inter perpendiculum AL & angulos basis
 B , C interceptarum. Centro enim A , radio latere minore AC
describatur circulus secans latus majus AB in D , & basem
(si opus productam) in O ; & producaturs BA donec circulo
iterum occurrat in E . Propter aequales AC , AD , AE , erit
 EB laterum summa; & BD illorum differentia: & propter
aequales (b) LC , LO , erunt BC & BO (vel in Fig. 59. BO (b) Per 3.
& BC) summa & differentia interceptarum LB , LC . Sed l. 3.
(c) rect. EBD = rect. CBO . Ergo, &c. (c) Per cor.
1. hujus.

In casu fig. 58. Theorema sic potest efferr.

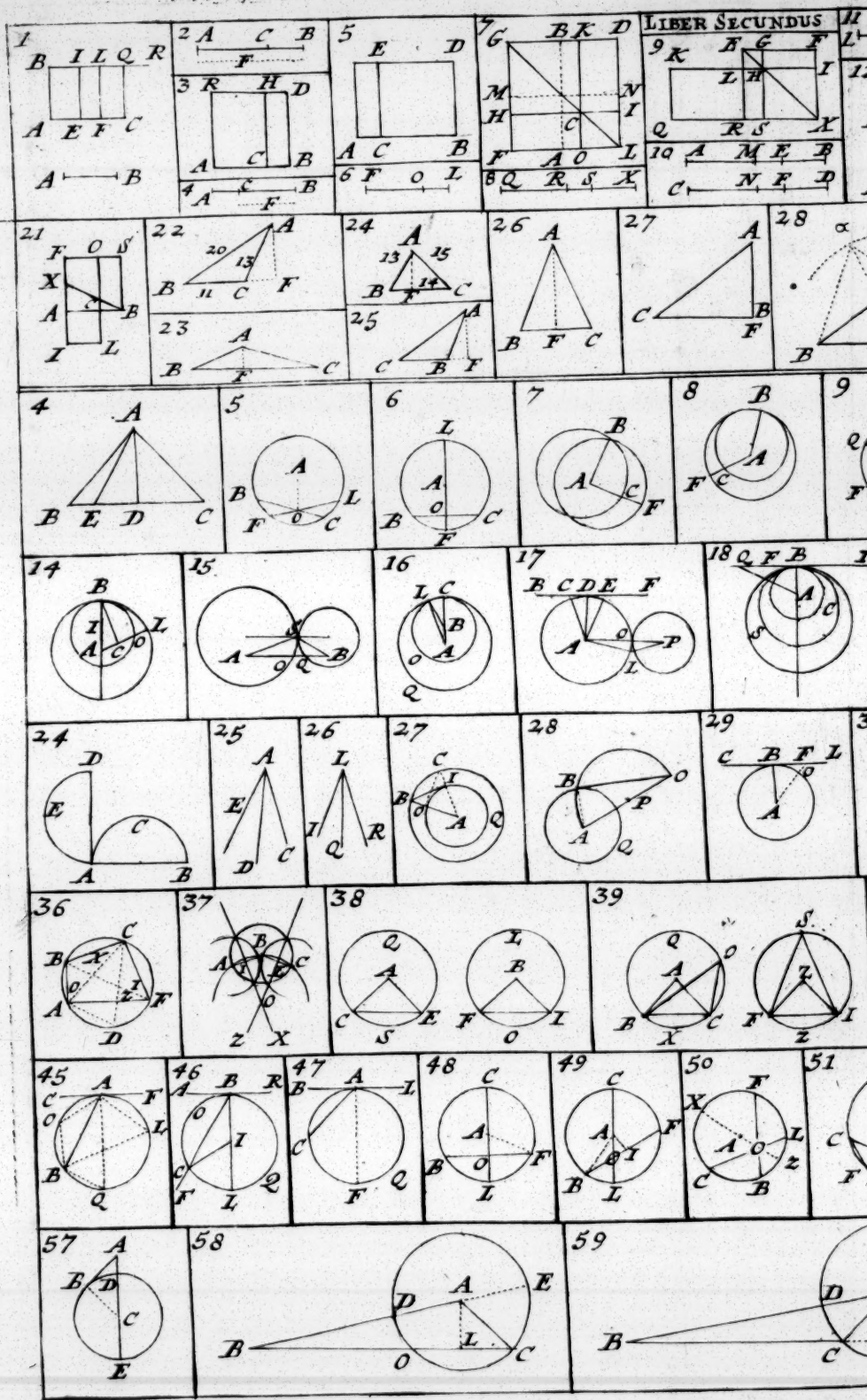
Si ab angulo A trianguli ABC demittatur perpendicularis
in basem BC , eam dividens in duo segmenta BL , LC ; erit
rectangulum sub summa & differentia laterum AB , AC , a-
quale rectangulo sub basi BC , & differentia segmentorum basis
 BO . Atque hujus theorematibus usus est eximius in trigonome-
tria plana.] Fig. 58.

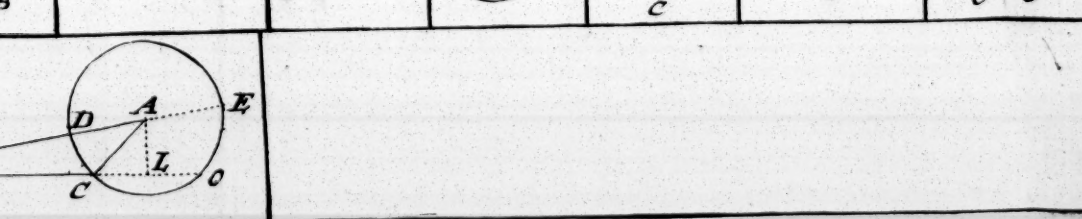
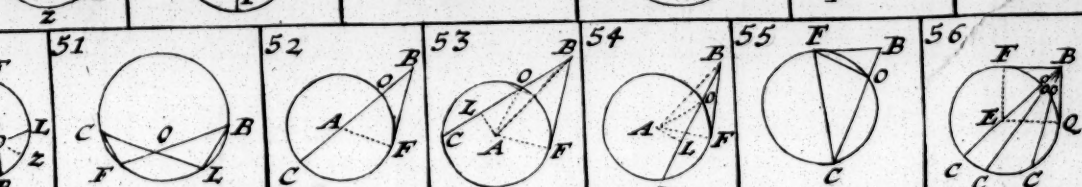
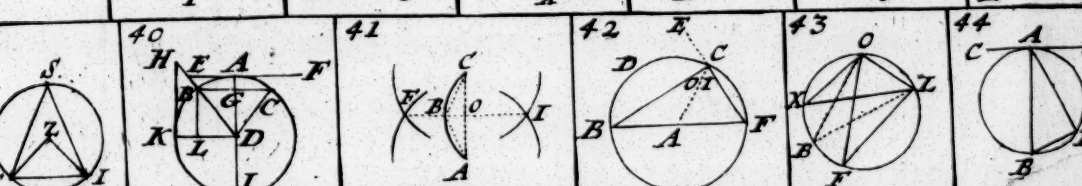
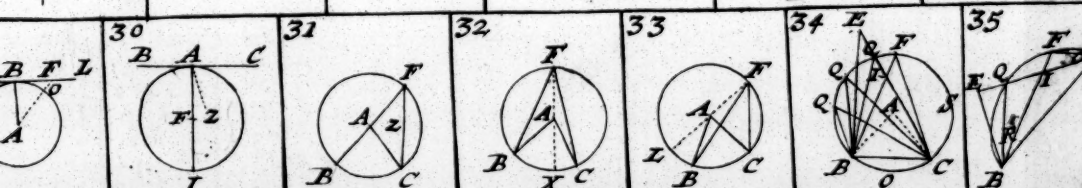
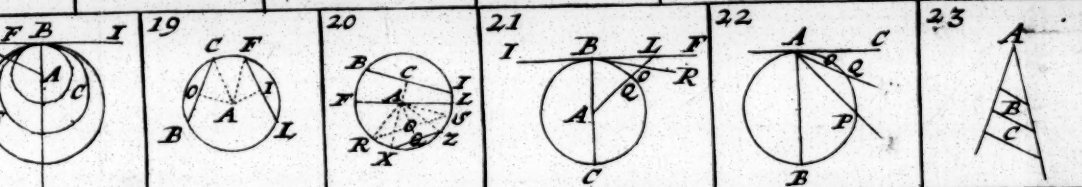
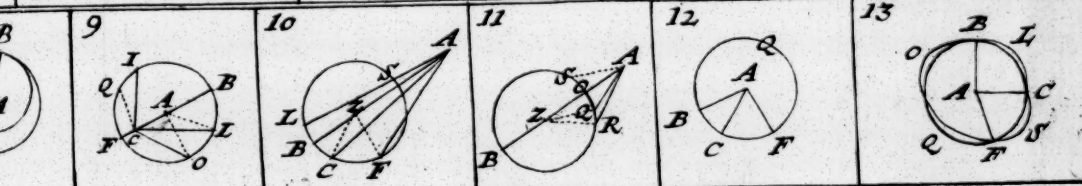
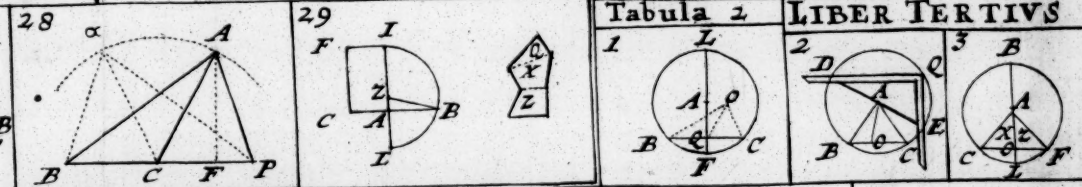
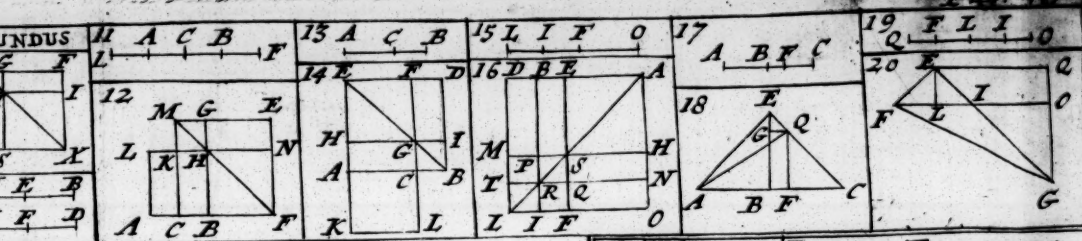
PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum sub CB & OB sit aequale qua-
drato BF , hac circulum tanget in F . Fig. 56.

[Hoc est, si a puncto B extra circulum dato, in circulum
cadant duae rectae, quarum altera BC circulum secet, altera
vero BF incidat, sit autem rectangulum sub tota secante CB
& parte BO inter punctum & circulum interjecta comprehen-
sum, aequale ei quod ab incidente BF sit quadrato; incidens
linea BF circulum tanget in F .]

- Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter se æqualia sunt; adeoque
- (a) Per axio. & (a) rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo (b) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (c) rectus est. Ergo etiam F rectus est. Ergo BF (d) tangit.
- (c) Per 18. l. 3.
- (d) Per 16. [Coroll. 1. Hinc angulus (e) EBF aqualis est angulo EBQ.]
- (e) Per 8. 2. Si dua rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in l. 1. convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum
- (f) Per axio. tangat, altera quoque BQ eundem circulum tanget. Nam cum BF, BQ sint æquales, earum quadrata erunt (f) æqualia. Sed BFq = (g) CBO, Ergo BQq = (h) CBO. Ergo etiam BQ per hanc prop. tangit circulum.]
- (g) Per prac. l. 1.
- (h) Per axio. i.





G

I

fi
læ

sili
ru
op
qu
ne
in
ar
ra
ar
cu
ge
lig
to
fe

i

t

h

g

a

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUARTUS.

HIC liber totus problematicus est: docet, quo artificio figuræ præsertim ordinatæ circulo inscribantur & conscribantur. Amplissimus est illius usus in munitionibus extruendis: & ex illo quasi fonte eximæ illæ sinuum, tangentium, & secantium tabulæ ingenti bono Matheseos fluxere.

Est vero Quartus hic Elementorum liber Trigonometriæ utilissimus. Circulo enim polygonâ inscribendo, tabulas Chordarum, Tangentiam, & Secantium fabricare discimus: quarum ope, figurarum & corporum magnitudines mensuramus. Neque absque eo stellarum Aspectus, quos vocant, Quartilem nempe, Sextilem, &c. rite distinguimus: utpote a polygonorum in circulo inscriptione omnino pendentes. Neque sane Circuli aream sive quadraturam quandam aliunde quam ex polygonorum innumerorum circulo inscriptorum & circumscriptorum areis sive quadraturis colligere possumus. Et haud aliter circulorum ad se invicem rationem duplicatam, e duplicata polygonorum iisdem inscriptorum aut circumscriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inscriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus scientiis, huic libro in solidum fere debere videatur.

DEFINITIONES.

1. **F**igura rectilinea circulo inscripta est, vel circulus figuræ circumscriptus, cum singulorum angulorum vertex in circumferentia existunt.
2. Figura rectilinea circulo circumscripta est, vel circulus figuræ inscriptus est, cum singula latera circum tangunt.
3. Figura ordinata seu regularis est, quæ æquilatera & æquiangula est.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 4. **C**irculo (BD) rectam datam (A) diametro non majorem, inscribere.

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B, intervallo datæ A, describe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam BC. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. **C**irculo triangulum inscribere dato (X) æquiangulum.

- (a) Per 23. Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par (a) angulo C, & FDH par B: jungaturque GH. Dico factum.
 l. 1.
 (b) Per 32. Nam angulus H æquatur (b) angulo EDG, hoc est, (c) angulo C; & G æquatur FDH, hoc est, ipsi B. Ergo
 l. 3.
 (c) Per constr. etiam GDH (d) æquatur A. Factum est igitur quod petebatur.
 (d) Per cor.
 9. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. **C**irculo circumscribere triangulum æquiangulum dato ILK.

Latus IK utrimque producat, ut fiant externi anguli O & N. Fac in centro A (per 23. l. 1.) angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE est circulo circumscriptum, & æquiangulum dato ILK.

- (e) Per 18. In quadrilatero CGAB, anguli G & B sunt duo (e) recti.
 l. 3.
 (f) Per theor. Ergo reliqui GAB & C conficiunt simul etiam duos (f) rectos, ac proinde æquantur duobus simul O, I. Ablatis igitur GAB & O æqualibus per constr. remanent æquales, 32. l. 1. C & I. Eodem modo ostenditur E æqualis esse K. Ergo
 (g) Per cor. D & L (g) etiam æquales erunt. Factum est igitur quod
 9. p. 32. l. 1. petebatur.

Quod autem tangentes concurrant, sic ostenditur. Anguli O, I, & K, N sunt æquales (h) 4. rectis; & I, K sunt

sunt minores duobus (a) rectis. Ergo $\odot$, N, (hoc est per (a) Per cor. construct. GAB & BAF) sunt majores duobus rectis. Ergo ^{17. p. 32. l. 1.} GAF est minor duobus (b) rectis. Ergo [arcus GBF est (c) semi- (b) Per cor. peripheriâ major, & arcus oppositus GF, semiperipheriâ minor. ^{3. p. 13. l. 1.} Unde] recta GF cadit [supra centrum A, hoc est,] inter A ^{(c) Per schol. p. 23. l. 1.} & D. Ergo cum AGD, AFD sint recti, erunt DGF, DFG ^{(d) Per schol. p. 31. l. 1.} duobus rectis minores. Ergo (d) CGD, EFD concurrunt versus D. Simili ratione demonstrabis concurrere reliquas.

[Aliter. Ad centrum A circuli dati, super radio BA ex Fig. 3. utraque parte, fiant ut prius, anguli BAG, BAF, angulis O, N externis trianguli dati ILK respective aequales, & in punctis B, G, F circulum tangant tres rectæ, quæ proinde angulos efficient rectos ABC, AGC; & ABE, AFE. Ductantur rectæ BG, BF, quæ ex utraque parte radii BA, formabunt triangula BAG, BAF. Si itaque a duobus angulis rectis ABC, AGC, trianguli BAG anguli ad B & G respective subducantur, restabunt anguli GBC, BGC duobus rectis minores: ergo tangentes BC, GC, si protrahantur ex parte angulorum duobus rectis minorum, tandem (e) con- (e) Per schol. current. Eodem modo tangentes BE, FE, si producantur, con- ^{post 31. l. 1.} current. Producantur; & concurrant BC, GC in C; & BE, FE in E. Cum igitur in quadrilatero ABCG anguli ad B ^{(f) Per The- & G sunt recti, erunt anguli BAG, BCG duobus rectis (f) or. 1. post aequales. Sed anguli O, I sunt duobus rectis (g) aequales, ^{32. l. 1.} quorum O (h) aequatur angulo BAG; Ergo angulus BCG æ- (g) Per 13. quatur angulo I. Eodem modo ostendetur angulum BEF an- l. 1. gulo K æqualem esse. Sed anguli I & K simul sumpti, sunt (h) Per con- duobus rectis (i) minores: ergo anguli GCE, CEF sunt duobus ^{str.} rectis minores, & proinde rectæ CG, EF (k) concurrent si pro- (i) Per cor. trahantur. Concurrant in D. Cum igitur anguli C & E ^{17. p. 32. l. 1.} trianguli CDE, angulis I & K trianguli ILK respective æqua- (k) Per schol. les sint; angulus D angulo L (l) æqualis erit: & singula tri- ^{post 31. l. 1.} anguli CDE latera (m) tangunt circulum datum. Circulo (l) Per cor. igitur BGF circumscribitur triangulum CDE, æquiangulum ^{9. p. 32. l. 1.} dato ILK. Q. E. F.] ^{(m) Per con- str.}}

PROPOSITIO IV.

Triangulo circulum inscribere.

Fig. 3.

Duos angulos C & E biseca rectis CA, EA coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, AF. Circulus centro A per B descriptus, transibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In

- In triangulis enim CAG & CAB, quia anguli AGC, ABC, itemque GCA, BCA per constr. æquantur, & latus quoque
- (a) Per 26. AC est commune, etiam AG, AB (a) æqualia erunt. Pari modo ostendam paria esse AB, AF. Circulus ergo descriptus centro A per B, transit per G, F; & quia anguli ad B, G, F sunt recti, tangit (b) omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

Fig. 3.

[Cor. 1. Hinc cognitis lateribus trianguli, invenientur eorundem segmenta quæ fiunt a contactibus circuli inscripti. Sit $DC=12$, $DE=16$, $CE=18$. Erit $CD+DE=28$, a quo subduc $CE (=18) = CG+EF$, & restabunt $GD+DF=10$. Ergo (c) $GD=5=DF$; $GC=7=CB$; $BE=11=EF$.

(c) Per cor. 2. p. 36. l. 3.

Cor. 2. Datis trianguli lateribus, & radio circuli inscripti, habetur area trianguli. Nam ductâ AD, inscripti circuli radius est altitudo communis trium triangulorum ACD, ADE, AEC in quæ dividitur triangulum CDE, & eorum bases sunt trianguli CDE latera: ergo radius in laterum semisummam,

(d) Per schol. dabit (d) aream trianguli CDE. Sit radius $AB=5$, & latera 12, 16, 18; quorum semisumma est 23: Est itaque $5 \times 23 = 115 = \text{area trianguli.}]$

PROPOSITIO V.

Fig. 4.

Triangulo circumscriptum circumscribere; siue per tria data puncta (B, C, D) non ad unam rectam posita, circumscriptum describere.

Puncta data B, C, D binis rectis BC, CD connecte, quas biseca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D transeuntis.

- Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB. Per constr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O sunt recti. Ergo AD (e) æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB (f) æquales. Ergo
- (e) Per 4. l. 1.
- (f) Per axio. 1.
- circulus centro A descriptus per B, transibit etiam per C & D. Quod petebatur.

Ad praxim tantum opus centris B, C, D describere tres æquales circulos se mutuo interfecantes, & per intersectiones ducere rectas: hæ sibi occurrentes dabunt centrum quæsitum.

Tab. 2. Fig. 36. lib. 3.

[Coroll. Hinc liquet, circumscriptum etiam Quadrilatero ABCE, cujus anguli oppositi ABC, AFC duobus rectis æquales sint, circumscribi posse. Nam ducta recta AC, circulus per hanc prop.

prop. circa triangulum ABC describi potest. Describatur; & in arcu opposito AFC , capiatur punctum quodvis D , & DA , DC ducantur. Ergo est $ABCD$ quadrilaterum circulo inscriptum, ac proinde anguli oppositi ABC , ADC (a) aequales sunt (a) Per 21. duobus rectis. Sed in quadrilatero $ABCF$, anguli ABC , AFC aequales duobus rectis esse ponuntur. Ablato igitur communi ABC , aequales erunt anguli ADC , AFC , eidem arcui ABC insistentes, quorum alter ADC est angulus ad peripheriam ipsi ABC oppositam: Ergo (b) uterque angulorum aequalium ad e- (b) Per schol. andem peripheriam existit, & proinde circulus per A , B , C , post pr. 21. tres angulos quadrilateri $ABCF$ descriptus, transibit etiam per angulum quartum F . Q. E. D.

Scholium. Si triangulo circulus circumscribatur, pro varia Fig. 5. l. 4. trianguli circumscripti specie, centrum circuli varie cadet. Si fuerit acutangulum, centrum cadet intra triangulum. Nam propter angulum acutum BCD (c) in segmento majore, cen- (c) Per 31. trum A cadet in illo segmento majore cujus basis est BD ; at- & schol. p. que eodem modo ostendetur centrum esse in illis segmentis ma- 21. l. 3. joribus quorum bases sunt BC , CD respective, adeoque cadet intra triangulum BCD . In triangulo vero rectangulo, propter Fig. 6. angulum in semicirculo (d) rectum, centrum cadet in latus an- (d) Per ead. gulo recto oppositum. In obtusangulo autem triangulo, propter Fig. 7. angulum obtusum in (e) segmento minore, centrum erit in segmen- (e) Per ead. to opposito, ac proinde extra triangulum cadet. Hinc sequitur,

1. Si a centro A ad singulos angulos B , C , D , trianguli Fig. 5. acutanguli ducantur recte AB , AC , AD , illa triangulum in tria aquicrura triangula ABC , ABD , ACD (propter aequales AB , AC , AD) dividunt. Et ob eandem causam, si Fig. 6. recta AC a centro circuli triangulo rectangulo circumscripti, ad (f) Vide cor. angulum rectum ducatur, illud in duo triangula isoscelia, 4. p. 31. l. 3. ABC , ACD dividet, quod & prius (f) observatum. Si vero Fig. 7. ad singulos trianguli obtusanguli angulos, a centro circuli circumscripti, ducantur recte AB , AC , AD , formabuntur inde tria aquicrura triangula, quorum illud cujus basis est latus BD angulo obtuso BCD oppositum, nempe triangulum BAD , erit extra triangulum obtusangulum, & simul cum eo quadrilaterum $ABCD$ formabit, duobus reliquis triangulis isosceliis ABC , ACD aequale.

2. Si a centro A in singula latera perpendiculares ducantur Fig. 5, 6, 7. radii AEF , AIH , AOG ; (vel si in circulo qui triangulo rectangulo circumscribitur, ductis ut prius AEF , AOG , a centro A erigatur lateri BD perpendicularis AH , quoniam puncta A & I in illo casu coincidunt;) isti radii tum ipsa latera in E , I (g) Per n. 1. & O , tum arcus qui a lateribus subtenduntur in F , H & G , schol. p. 26. tum triangulorum isoscelium angulos verticales ad A , (g) bifa- l. 1. & p. riam 30. l. 3.

- (a) Per 30. riam secabunt. Et in circulo circa obtusangulum triangulum, l. 3. completa diametro HAK, arcus BKD bisecabitur (a) in K.
- Fig. 5. 3. Unde in triangulo acutangulo, BE, BI, CO, &c. semisses
- (b) Per cor. laterum BC, BD, CD, erunt (b) angulorum BAF, BAH, CAG, l. p. 3. l. 3. &c. sinus recti; & similiter in triang. rectang. vel obtusang. Fig. 6, 7. ipsas BE, CO angulorum BAF, CAG sinus rectos esse constat:
- Fig. 6. in triangulo autem rectangulo radium circuli BI anguli recti
- Fig. 7. BAH sinum rectum esse patet ex def. 10. l. 3. Et cum idem (c)
- (c) Per def. sit anguli cujuscvis, & complementi ejus ad duos rectos, sinus 10. l. 3. rectus; Ergo in casu trianguli obliquanguli, recta BI tam anguli BAH quam etiam anguli BAK sinus rectus erit.
- Fig. 5, 6, 7. 4. Angulus ad centrum BAF super arcu dimidio BF, aqua-
- (d) Per cor. lis est angulo ad peripheriam BDC super arcu integro BC, 2. hujus sch.
- (e) Per 20. Cum enim angulus BAC tum anguli BAF (d) ad centrum, tum anguli BDC ad (e) circumferentiam duplus sit; anguli igitur BAF, BDC (f) aequales erunt. Et pari modo ostenditur aequales esse angulos CAG, CBD; item aequales esse in Fig. 5, 6. triangulo acutangulo angulos BAH, BCD, quos in triangulo rectangulo rectos & proinde aequales esse patet: In circulo autem circa triangulum obtusangulum descripto, angulum BAK ad centrum super arcu dimidio BK, angulo obtuso BCD ad peripheriam super arcu integro BKD aequalem esse sic probatur. Ductis BK, DK, angulum ad centrum BAH super arcu dimidio, aequalem esse angulo ad peripheriam BKD super arcu integro, patet ut supra: sed in quadrilatero BCDK circulo inscripto, anguli oppositi BCD, BKD (g) duobus rectis, hoc est, angulis l. 3. BAH, BAK simul sumptis (h) aequantur. Ablatis igitur a-
- (h) Per 13. qualibus BKD, BAH, remanebunt aequales BCD, BAK. l. 1.
- Fig. 5, 6, 7. 5. Cujuscunque trianguli BCD latera BC, BD, CD sunt inter se, ut sinus angulorum BDC, BCD, CBD lateribus respective oppositorum. Nam latera BC, BD, CD sunt inter se invicem ut eorum semisses BE, BI, CO, hoc est, ut (i) sinus
- (i) Per cor. angulorum BAF, BAH (vel BAK,) CAG. Sed anguli isti 3. hujus sch. angulis (k) BDC, BCD, CBD respective sunt aequales. Ergo
- (k) Per cor. latera BC, BD, CD sunt inter se, ut sinus angulorum lateribus 4. huj. schol. illis respective oppositorum. Atque ab hoc unico corollario, magna pars trigonometria plana deducitur: quod diligenter est notandum.
- Fig. 62. 6. Hinc Luna distantiam metiri discimus. Dato enim per l. 1. observationes Astronomicas Parallaxeos diurnae angulo BCA, & angulo DBC, & proinde ejus complemento ad duos rectos CBA, una cum Telluris semidiametro AB, Luna distantiam sequenti analogia investigamus. Ut sinus anguli ACB, ad sin-
- (l) Per cor. num anguli (l) CBA; ita BA Telluris semidiameter, ad AC 3. huj. schol. distantiam Luna. Q.E. I.

7. Hinc Solis etiam distantiam metiri discimus. Datis enim ^{Fig. 8. l. 4.} per observationes Astronomicas parallaxeos menstrua angulo, ubi scilicet Luna precise bisecta apparet ZEO, & Luna distantia ZO; per analogiam sequentem, distantiam Solis colligimus. Ut Sinus anguli ZEO, ad sinum anguli recti EOZ sive, (a) (a) Per def. radium; (b) ita ZO distantia Luna, ad ZE distantiam Solis. ^{10. l. 3.} (b) Per cor. ^{5. huj. schol.}

Q. E. I.]

PROPOSITIO VI. & VII.

Circulo quadratum inscribere, & circumscribere. ^{Fig. 9.}

Ducantur diametri BD, CE se mutuo secantes perpendiculariter. Rectæ quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inscribunt.

Demonstratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. [Nam in triangulis CAD, DAE, ob angulos aequales ad A, nempe rectos, & latera circa illos respectivè equalia, bases CD, DE (c) aequales (c) Per 4. l. erunt; & eodem modo omnia latera EB, BC, CD, DE figura inscripta sibi invicem aquari patebit. Et quia CE circuli diameter est, angulus CDE in semicirculo (d) rectus erit; & (d) Per 31. ob eandem rationem anguli DEB, EBC, BCD recti sunt. Quadrilaterum ergo inscriptum est æquilaterum & rectangulum; & (e) proinde quadratum est. (e) Per def. 32. l. 1.

Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum est circulo circumscriptum.

Demonstratio patet ex 18. l. 3. & ex 28. 30. & 34. l. 1.

[Quia enim rectæ HI, IF, FG, GH circulum tangunt in extremitatibus diametrorum BD, CE; cum diametris istis (f) efficient angulos rectos ad B, C, D, E. Et propter angulos etiam rectos ad centrum A, aequales erunt alterni anguli CAB, ABH, & rectæ CE, IH (g) erunt parallelæ: eodem modo constabit rectas CE, FG parallelas esse: Ergo & FG, IH parallelæ (h) sunt. Et pari modo probabitur rectas FI, GH tum rectæ DB, tum sibi invicem parallelas esse. Parallelogrammum igitur est IFGH, & latera opposita (i) aequalia sunt; nempe FI = GH, & FG = IH. Sed ob parallelogramma CFGE, & DGHB, latera FG, GH parallelogrammi FGHI, (k) aequalia sunt circumli diametris CE, DB; & proinde omnia latera IF, FG, GH, and HI sibi invicem aequalia sunt. Porro, in parallelogrammo FDAC, angulus ad A rectus est: ergo etiam angulus ad F rectus (l) erit; & pari modo, anguli ad G, H, I recti erunt. (l) Per eand.

Ergo

Ergo IFGH est parallelogrammum equilaterum & rectangulum; sive quadratum: cujus omnia latera circulum datum tangunt. Est igitur quadratum circulo circumscriptum.]

Scholium.

Fig. 9.

(a) Per 31.

l. 3.

(b) Per 47.

l. 1.

(c) Per cor.

l. p. 47. l. 1.

Quadratum circumscriptum circulo, duplum est inscripti, Nam quia angulus BCD in semicirculo rectus (a) est; erit quadratum ex DB (hoc est quadratum FI) æquale (b) quadratis DC, BC, ac proinde (c) duplum quadrati DC, hoc est quadrati CDEB. [Item quadratum inscriptum duplum est radii quadrati.]

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 10.

Quadrato (BEFC) circulum inscribere, & circumscribere.

Ducantur diametri in quadrato se secantes in A. Centro A per B descriptus circulus transibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per D descriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera sunt æqualia, erunt anguli BCE, BEC (d) æquales. Angulus autem CBE rectus est per hyp. Ergo BCE, BEC (e) sunt semirecti. Eodem modo ostendam CBF & reliquos esse semirectos, adeoque æquales inter se. Ergo in triangulo BAC, cum duo sint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB & AC (f) æquales. Eadem ratione AB, AE, AF æquales erunt. Circulus igitur centro A per B descriptus, transibit etiam per E, F, C.

Pars 2. Ex A sint perpendiculares insuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter se æquales sunt, latusque AB commune, latera (g) AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia sunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D transiens, transibit etiam per G, H, I, tangetque latera (h) omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I sunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

Fig. 9.

Coroll. 1. Hinc, cum angulus CDF a tangente & secante factus sit semirectus, sive gr. 45; & angulus CDG sesquirectus sive gr. 135; ergo latus quadrati circulo inscriptibilis (sive

(sive recta abscindens quadrantem totius peripheria) at DC, circulum dividet in duo segmenta, (a) quorum majus continet (a) Per 32. angulum semirectum, & minus angulum sesquirectum. An-1. 3. gulus igitur in segmento quadrantalı aqualis est angulo recto & semirecto simul sumptis, atque angulus super arcu quadrantalı, sive in segmento opposito, aqualis est semirecto.

Coroll. 2. Hinc etiam, si super DC latere quadrati circulo inscripti pro diametro, describatur alius circulus minor, ipsius circumferentia per A centrum circuli majoris transibit. Nam circa quadratum ACED, cujus angulus A est in centro majoris circuli, circumscribetur (b) iste circulus minor.] (b) Per 9. l. 4.

PROPOSITIO X.

Triangulum Iſosceles construere (BAC) in quo Fig. 11. angulus ad basim (ABC vel ACB) sit duplus anguli ad verticem (A.)

Sumatur quævis recta AB, quam ita feca (c) in D, ut (c) Per 11. rectangulum ABD sit æquale quadrato DA. Tum centro l. 2. A per B describe circulum, cui inscribe BC (d) æqualem (d) Per 1. l. DA, & junge AC. Erit triangulum BAC quæsitum. 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A describe (e) (e) Per 5. circulum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato l. 4. AD, hoc est BC, liquet BC tangere (f) circulum DO quem (f) Per 37. fecat CD. Ergo angulus BCD æquatur (g) angulo A in l. 3. segmento alterno: additoque communi DCA, erit BCA (g) Per 32. æqualis duobus A & DCA. Sed quia latera AB, AC æquan- l. 3. tur, ABC æqualis (h) est BCA. Ergo etiam ABC æqua- (h) Per 5. tur duobus internis A & DCA. Sed etiam externus BDC l. 1. (i) æquatur duobus internis A & DCA. Ergo ABC & BDC (i) Per 32. æquales sunt. Recta igitur DC æquatur (k) BC, hoc est l. 1. per constr. DA. Ergo anguli A & DCA (l) æquantur. (k) Per 6. Quare angulus ABC, qui duobus ostensus est æqualis, du- l. 1. plus erit unius A. Factum igitur est quod petebatur. (l) Per 5. l. 1.

[Scholium. Ex hujus propositionis constructione liquet quomodo ex dato AB uno crurum æqualium, conficiatur triangulum quæsitum. Si vero super data basi CB, triangulum Iſosceles ABC sit ita construendum, ut utervis angulorum ad basem duplus sit anguli ad verticem; primo, super CB tanquam uno crurum æqualium, construatur ejusmodi triangulum CBD, cujus vertex sit C, basis BD: deinde super BC ad punctum C fiat (m) angulus BCA æqualis angulo CBD, & producat (m) Per 23. BD donec occurrat ipsi CA in A. Erit ABC triangulum qua- l. 1. situm super data basi BC constructum.]

H

Corollaria.

Corollaria.

Fig. 11.

1. **A** Nguli ad basim singuli B & C in triangulo Isoscelio jam constructo, sunt duæ quintæ duorum rectorum, seu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A est una quinta duorum rectorum seu duæ quintæ unius. Patet ex propositione hac & ex 32. lib 1.

[Sch. ad cor. 1. Cum duo anguli recti per semicirculum, sive per gradus 180 mensurentur, erit quinta pars duorum rectorum, nempe angulus A, gr. 36; & duæ quintæ duorum rectorum, nempe B, gr. 36 bis, sive gr. 72. Et cum unus ang. rectus sit gr. 90, ejus quinta pars erit gr. 18. Ergo angulus A (gr. 36) continet duas quintas unius recti, & ang. B (gr. 72) quatuor quintas unius recti, & proinde duæ quintæ duorum rectorum sunt quatuor quintæ unius recti; & una quinta duorum efficit duas quintas unius. Et universaliter, in angulo aestimando per rectorum quorumcunque partes, dimidiatus rectorum numerus inferet partium numerum duplicatum; & vice versa. Sic, si quisvis angulus faciat sex quintas unius recti; ergo tres quintas duorum rectorum efficiet.

Fig. 11.

Cor. 2. Cum angulus BAC sit duorum rectorum pars quinta, sive duæ partes decimæ, hoc est, gr. 36, erit etiam una decima quatuor rectorum, sive integri circuli, gr. 360; & proinde recta BC est latus decagoni ordinati, circulo inscribendi, cujus radius sit AB vel AC.

Cor. 3. Si radius circuli AB ita secetur in D, ut rectangulum ABD sub toto radio & segmento minore, aequale sit quadrato DA segmenti majoris; erit segmentum illud majus AD latus decagoni, circulo cujus radius sit AB inscribendi. Constat enim ex prop. hujus demonstratione, segmentum AD ipsi BC æquale esse.

Cor. 4. Si centro C, radio CB vel CD describatur circulus; cum sit BCD triangulum isosceles triangulo BAC equiangulum (a), erit basis BD latus decagoni ordinati (b) eidem circulo inscribendi. Et & cum circuli radius CB (= (c) AD) sit latus hexagoni (d) eidem circulo inscribendi, Ergo, si recta quavis AB ita secetur in D, ut rectangulum ABD sub tota AB & segmento minore BD æquetur quadrato segmenti majoris AD, erit segmentum majus AD latus hexagoni, & minus DB decagoni eidem circulo inscribibilium. Atque hæc est prop. 9. lib. 13. Euclidis.

Cor. 5. Hinc discimus arcum circuli quadrantalem in quinque partes æquales (ac proinde, continua (e) bisectione, in partes æquales

(a) Liqueat ex hujus prop 10. demonstr.

(b) Per cor. 2. hujus.

(c) Per constr. hujus.

(d) Per cor. 1. p. 10.

(e) Per cor. 1. p. 15. l. 4.

(f) Per 30. l. 3.

æquales 10, 20, 40, &c.) secare; nempe arcum BC bisecando. Cum enim recta BC sit latus (a) decagoni ordinati circulo, cujus (a) Per cor. centrum sit A, radius AB, inscripti; erit arcus BC pars decima totius circumferentiæ, sive pars quinta semicircumferentiæ; atque adeo dimidium ipsius BC erit pars decima semicircumferentiæ, sive pars quinta arcus quadrantalæ.]

PROPOSITIO XI.

Circulo pentagonum ordinatum inscribere.

Fig. 11. & 12.

Describatur (b) triangulum BAC habens angulum ad (b) Per præc. basim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD (c) inscribere circulo. Angulos ad basim ACD, & ADC (c) Per 2. feca bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circulo in E l. 4. & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa, dabunt pentagonum ordinatum circulo inscriptum.

Nam ex constructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales esse. Quare etiam arcus iis subtensi, AE, ED, DC, CB, BA (d) sunt æquales. Itaque rectæ sub- (d) Per 28. tensæ arcibus etiam æquales (e) erunt. Pentagonum igitur l. 3. æquilaterum est. Est vero etiam æquiangulum, (f) quia (e) Per 27. ejus anguli BAE, AED, &c. insistant arcibus æqualibus l. 3. BCDE, ABCD, &c. Factum est igitur quod petebatur. (f) Per 29. l. 3.

Corollaria.

1. **A**ngulus Pentagoni ordinati facit sex quintas unius Fig. 12. recti, seu (g) tres quintas duorum. Nam tres anguli (g) Vide ad A, cum sint æquales, utpote æqualibus arcibus BC, CD, DE, insistentes, & medius per coroll. 1. præced. sit cor. 1. præc. duæ quintæ unius recti, tres simul, hoc est, ipse pentagoni angulus, conficiunt sex quintas unius recti.

[Schol. ad cor. 1. Cum anguli recti pars quinta sit gr. 18, erit angulus Pentagoni ordinati gr. 18 sexies, sive gr. 108. Cum vero partes sex quintas unius recti enumerat author, idem est ac si angulum rectum quinta sui parte auctum diceret.

Cor. 2. Ex hujus propositionis constructione liquet, quomodo super data recta CD, pentagonum ordinatum construere oportet. Fiat (h) enim super illa tanquam basi, triangulum (h) Per Isosceles ACD, in quo angulus ad basem duplus sit anguli ad schol. post verticem; circa quod, (i) describatur circulus, & bisecetur p. 10. l. 4. rur anguli ad basem rectis CE, DB, circulo occurrentibus in (i) Per 5. E, B. Ductæ rectæ AB, BC, DE, EA perficient ordinatum l. 4. pentagonum.

pentagonum super data recta CD descriptum, uti ex propositionis demonstratione apparet. Aliam porro methodum idem construendi, docebit problema mox secuturum.

Fig. 12.

Scholium 1. Universaliter, figura imparium laterum inscribuntur circulo beneficio triangulorum Ifofelium, quorum anguli aequales ad basim, multiplices sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum. Parium vero laterum figura in circulo inscribuntur ope Ifofelium triangulorum quorum anguli ad basim multiplices seiquialteræ sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum. Ut in triangulo Ifocele ACD, si angulus C aut D aequalis sit tribus angulis A, Latus CD erit latus Heptagoni; si quatuor, erit latus Enneagoni, &c. Sin vero C vel D aequalis sit $1\frac{1}{2}$ anguli A, erit CD latus quadrati: Et si C vel D aequalis sit $2\frac{1}{2}$ anguli A, subtendet CD sextam partem circumferentiae. Pariterque si C vel D aequalis sit $3\frac{1}{2}$ anguli A, erit CD latus octogoni, &c. Nam qua ratione in Ifocele huius prop. angulorum ad basem bisectorum partes, una cum angulo verticali, insistant arcubus quinque, equalibus peripheria totius partibus; & proinde si ejusmodi triangulum circulo inscribatur, ipsius basis erit latus pentagoni ordinati, eidem circulo inscribendi: eadem ratione, si Ifocelis angulus alteruter ad basem triplus fuerit anguli ad verticem; angulorum ad basem trisectionum partes, una cum angulo verticali, insistent arcubus septem, equalibus itidem totius peripheria partibus; ac proinde, si ejusmodi triangulum circulo inscribatur, ipsius basis erit latus heptagoni ordinati, eidem circulo inscribendi. Et pari modo constabit de reliquis. Sit n numerus laterum figura ordinata circulo inscribenda: Erit Ifocelis, inscriptioni inservientis, Angulus ad basem, Ad angulum verticalem, Ut $\frac{n-1}{2}$.

Ad 1. Unde posita unitate pro angulo verticali, anguli ad basem Ifocelis, una cum angulo isto verticali, hisce numeris pro quavis figura ordinata inscribenda, erunt exponendi; nempe pro triangulo aequilatero, $1 + 1 + 1 = 3$; pro quadrato, $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4$; pro pentagono $2 + 2 + 1 = 5$; pro hexagono $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6$; pro heptagono $3 + 3 + 1 = 7$. Et eodem modo pro aliis ordinatis inscribendis, procedendum est.]

Scholium 2.

Ingeniosa est Euclidea pentagoni inscriptio, sed multo expeditior illa Ptolemæi, quam tradit lib. 1. Almagesti, & est ejusmodi.

Ducantur

Ducantur diametri ED, BF se mutuo perpendiculariter *Fig. 13.* interfecantes in A. Radium AD biseca in C. Centro C per B describe arcum, diametro ED occurrentem in G. Recta GB est latus pentagoni, & AG decagoni.

Demonstratio hic dari nequit, pendet enim a prop. 10. lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clavius in scholio post p. 10. l. 13.

[In illa prop. 10. libri sui 13. demonstrat Euclides, pentagoni ordinati circulo inscripti quadratum, equari quadratis hexagoni & decagoni ordinatorum, eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. Jam vero latus hexagoni ordinati circulo inscripti, ejusdem circuli radio aequale esse constabit ex cor. 1. p. 15. l. 4. Et latus decagoni ordinati eidem circulo inscripti, partem esse majorem radii secundum prop. 11. l. 2. secti, constat ex cor. 3. p. 10. l. 4. Atqui in fig. 13. trianguli ABG rectanguli ad A, latus AB est circuli EBDF radius; & latus AG est segmentum majus radii AE secundum prop. 11. l. 2. secti, ut propositionis illius constructionem cum Scholii hujus constructione conferenti patebit. Ergo per 10. l. 13. & 47. l. 1. BG erit latus pentagoni eidem circulo inscripti. Propositionis autem illius decima lib. 13. demonstrationem, ad calcem libri sexti apponemus.]

Problema.

Super data recta (AB) pentagonum ordinatum ita con- *Fig. 14.* strues. Seca (a) AB, sic ut rectangulum ABC sit æ- (a) Per 11. quale quadrato AC. Ex AB utrinque producta aufer AD, l. 2. BE æquales majori segmento AC. Centris A & D, intervallo AB describe arcus duos, secantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo se secantes in G. Rursum centris F & G intervallo itidem AB, alios se secantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc est, æquilaterum & æquiangulum) super data AB.

Æquilaterum esse patet ex constructione: æquiangulum esse sic demonstrabitur. Ducatur DF. Patet ex constructione triangulum AFD esse Isosceles. Et basis AD est (b) Confer majus segmentum lateris DF, extrema & media ratione (b) p. 30. l. 6. secti, (est enim DF æqualis AB, & AD æqualis AC.) Ergo cum p. 11. angulus (c) DAF est duæ quintæ duorum rectorum. Ergo l. 2. reliquus FAB est (d) tres quintæ duorum rectorum, sive (c) Per cor. 1. sex quintæ unius recti; ac proinde est (e) angulus penta- p. 10. l. 4. goni ordinati. Eodem modo ostenditur angulum GBA esse (d) Per 13. l. 1. sex quintas unius recti, ac proinde parem FAB. Unde ne- (e) Per cor. 1. cesse p. 11. l. 4.

cesse jam est reliquos F, G, I, his æquales esse, ut patet ex 8. l. 1. si concipiatur subtendi recta FG.

- [Ducantur enim rectæ FG, FB: Propter triangula ADF, EBG super basibus aequalibus AD, EB, aqualia, erunt rectæ
 (a) Per 40. FG, DE (a) parallela, & proinde alterni anguli DAF, AFG;
 l. 1. EBG, BGF (b) æquales; & eorum quilibet erit dua quinta
 (b) Per 27. duorum rectorum. Porro, cum in triangulo Isoscele AFB an-
 l. 1. gulus A ad verticem sit tres quintæ duorum rectorum, (c) erit
 (c) Per 32. alteruter ad basem, una quinta, & proinde BF bisecat angulum
 l. 1. AFG, & angulus FBG (ABG — ABF, una nempe quinta ex tri-
 bus quintis subducta) continebit duas quintas, FGB duas, BFG
 (d) Per 6. unam: Igitur in triangulo BFG, latus FB lateri FG (d) æquale
 l. 1. est. Ergo triangula BAF, FIG sunt sibi mutuo æquilatera, &
 (e) Per 8. proinde (e) æquiangulara, & angulus FIG continebit etiam tres
 l. 1. quintas duorum rectorum, IFG unam, IGF unam. Ergo an-
 guli IFG, GFA simul additi, efficiunt etiam tres quintas;
 & eodem modo angulus IGB continebit etiam tres quintas.
 Ergo pentagonum est æquiangulum. Construitur ergo super
 data recta AB pentagonum ordinatum. Q. E. F.

Alio modo super data recta AB construetur pentagonum or-
 dinatum, si super AB tanquam basi, ex parte contraria, fiat
 triangulum Isosceles ABX, cujus angulus ad basem BAX vel
 ABX duplus sit anguli X ad verticem; & productis XA, XB
 ad E, G, ut sint AF, BG ipsi AB respectiue æquales, centris F &
 G, radiis AF, BG, describantur circuli se secantes in duobus
 punctis, quorum ab AB remotius sit I, & ducantur FI, GI:
 Dico factum. Demonstratio fere eadem erit cum priore.]†

+ Vid. Corat.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15.

Circulo pentagonum ordinatum circumscribere.

Inscribatur pentagonum ordinatum per præced. GHIKM, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. Dico factum.

- Ex centro duc rectas AG, AB, AH, AC, AI. Quoniam
 (f) Per cor. BG, BH ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales (f)
 2. p. 36. l. erunt. Trigona igitur GAB, HAB, sibi mutuo æquilatera
 3. sunt. Æquantur ergo (g) anguli O, P, item Q, S: ac pro-
 (g) Per 8. inde totus B duplus est ipsius P, & totus GAH duplus est
 l. 1. S. Eadem de causa anguli C & HAI dupli sunt ipsorum T,
 (h) Per 26. & N. Sed GAH & HAI æquales (h) sunt, quia insistant
 & 29. l. 3. arcibus æqualibus GH, HI, per constr. Ergo etiam eo-
 rum

rum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in tri-
angulis BAH, CAH, duo anguli S, N æquantur, itemque
duo ad H (a) recti, latiusque AH est commune, etiam (b) (a) Per 18.
BH, CH, itemque anguli P, T æquales erunt. Eodem l. 3.
modo ostendam rectas BG, FG esse æquales. Igitur CB, (b) Per 26.
FB duplæ sunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. l. 1.
Eodem modo ostendam reliqua latera pentagoni circumscripti
esse æqualia. Illud igitur æquilaterum erit. Est vero &
æquiangulum, quia cum jam ostensum sit angulos B & C
duplos esse æqualium P & T; etiam ipsi æquales erunt:
eodemque modo & reliqui. Ordinatam igitur pentagonum
circulo circumscriptimus. Quod erat faciendum.

Scholium. Eodem artificio circulo circumscribitur ordinata
figura quæcunque, si prius illi similis circulo inscribatur:
[nempe ductis tangentibus ad illa circumferentie puncta, G, H,
I, K, &c. ubi figura inscripta anguli circumferentiam tangunt.]

PROPOSITIO XIII. & XIV.

Pentagono ordinato circulum inscribere, & cir- Fig. 16.
cumscribere.

Duos pentagoni angulos B, C biseca rectis BA, CA con-
currentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L descriptus, tanget omnia penta-
goni latera. Circulus vero descriptus centro A per B, transi-
bit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. [Ab angulis D, E, F ad punctum A, ducantur etiam
DA, EA, FA.] In trigonis DCA, BCA, quia latera DC,
AC, (c) lateribus BC, CA, itemque (d) anguli P & O (c) Per hyp.
æquantur, etiam G & I æquales (e) erunt. Sunt vero (f) (d) Per con-
etiam toti B & D æquales. Quare cum (g) angulus G sit str.
dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipsius D. Igitur (e) Per 4.
D quoque bisectus est recta DA. Ob eandem causam, (f) Per hyp.
reliqui pentagoni anguli E, F sunt bisecti: ac proinde omnes (g) Per con-
dimidii anguli inter se æquales erunt. Ducantur insuper str.
perpendiculares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in
trigonis LBA, MBA, anguli G, BLA æquantur angulis Q,
BMA, latiusque BA commune est, etiam (h) AL, AM æqua- (h) Per 26.
les erunt. Pari modo ostendam reliquas AM, AS, AN, AR l. 1.
inter se æquari. Circulus ergo centro A transiens per L,
transibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M,
S, N, R recti sunt per constr. tanget (i) quinque latera (i) Per 16.
pentagoni. Quod erat primum. l. 3.

H 4

Pars 2.

Pars 2. In trigono CAB, quia anguli O & G jam ostensi sunt æquales, erunt latera AC, AB (a) æqualia; eademque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD; ac proinde circulus centro A transiens per B, transibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inscripsimus & circumscripsimus. Quod erat faciendum.

Fig. 16.

[Scholium. Eadem methodo in qualibet figura æquilatera & æquiangulari, & circa quamlibet figuram æquilateram & æquiangularam, circulus describetur, si bisecentur duo quivis anguli proximi DCB, CBF rectis CA, BA, & a puncto concursus A, lateri cuius BC demittatur perpendicularis AL: Circuli enim centro A radiis AL, AB descripti, erunt figura data alter inscriptus, alter circumscriptus.

Cor. 1. Hinc, si duo anguli proximi B, C figura ordinata bisecentur rectis BA, CA, concurrentibus in A, & a puncto concursus ducantur rectæ AD, AE, AF ad reliquos figura an-

(b) Per def. gulos; omnes anguli figura erunt bisecti. Unde (b) figura illa 3. l. 4. & p. ordinata dividetur in tot triangula isoscelia æqualia, quot sunt 6. & 26. l. 1. latera figura. Et ab A demissis AL, AM, &c. ad figura

(c) Per n. 1. latera perpendicularibus; hæ latera (c) bisecabunt, & cum schol. p. 26. radii sint inscripti circuli, sibi invicem æquales erunt. l. 1.

Cor. 2. Dato itaque figura ordinata latere, & radio circuli inscripti, habetur figura illius area, si radio in lateris semissem

(d) Per sch. (d) ducto, numerus inde proveniens multiplicetur per denomina- p. 41. l. 1. torem figura. Sic area pentagoni BCDEF est $AL \times LB \times 5$]

PROPOSITIO XV.

Fig. 17.

IN dato circulo Hexagonum ordinatum describere.

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A describe circulum, qui datum secet in C & D. Item centro F per A describe circulum, qui secet datum in E & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa, dabunt quæsitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet (e) Ex 1. triangula H, I, M, L (e) esse æquilatera. Deinde quia anguli CAB, EAF, singuli (f) efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde simul duas tertias, patet (g) EAC etiam esse unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales sunt. Sunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo (h) basis EC basi CB, hoc est (ut jam ostensum,) radio AC æqualis est. Quare etiam N æquilaterum est. Eodem modo ostenditur æquilaterum

laterum esse K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N æquilatera sunt, Patet latera singula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, seu AB, ac proinde inter se. Hexagonum igitur æquilaterum est. Est vero & æquiangulum, cum singuli ejus anguli E, C, B, D, G, F constant duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inscripsimus, est ordinatum.

Corollaria.

1. **L**atus hexagoni circulo inscripti [*sive chorda graduum 60.*] æquale est radio. [*Ergo sinus 30. graduum æquatur radii (a) dimidio.*] (a) Per cor. 1. p. 3. l. 3.

2. Angulus hexagoni ordinati est quatuor tertiæ unius recti: constat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum singuli conficiunt (b) duas tertias unius recti. [*Con- timet igitur angulum rectum cum tertia parte recti, hoc est, gr. 90 + 30. = gr. 120.*] (b) Per cor. 12. p. 32. l. 1.

3. Si ducatur insuper diameter PS, perpendicularis alteri Fig. 18. FB, & intervallo radii PA, centris P & S, sectiones fiant in O & Q, in R & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa, dabunt duodecangulum ordinatum una circini apertura circulo inscriptum. Id quod magno est usui in Gnomonica. [*Atque hinc etiam discimus arcum quadrantalem PF in tres partes aequales PE, EO, OF (& proinde, continua (c) bisectione, in partes aequales 6, 12, 24, 48, (&c.) partiri.*] (c) Per 30. l. 3.

4. Ex demonstratis elicitur etiam descriptio facillima tri- Fig. 18. anguli æquilateri in circulo. Ducta diametro FB, centro B per A centrum describe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæsitum.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD) a diametro (BF) ad ipsum perpendiculari, quartam partem (BX) abscindit. Nam anguli ACX, BCX, æqualibus arcibus GD, DB insistentes, (d) Per 29. æquales (d) sunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Ergo AX, BX (e) æquales sunt. Ergo BX est quarta (e) Per 4. pars diametri BF. l. 1.

[Aliter. Propter ACX, BCX ut prius æquales, & angulos (f) Per hyp. ad X (f) rectos & proinde æquales, & latus CX commune, erit (g) Per 26. (g) AX=BX.] l. 1.

Scholium.

Problema.

Hexagonum ordinatum super data recta (BC) ita con- Fig. 17. strues. Fac (h) triangulum CAB æquilaterum supra (h) Per 1. datam CB. Centro A per B & C describe circulum. Is l. 1. capiet

capiet hexagonum super data recta CB. Patet ex propos. & corol. 1.

Theorema.

Fig. 18.

Quadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum est quadrati ex semidiametro circuli cui inscriptum est, adeoque ad quadratum diametri est ut 3. ad 4. [*Est p. 12. l. 13. Euclidis.*]

Ducatur semidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis (a) FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectang. FAX bis est par quadrato semidiametri FA, seu DA: (b) *Per cor. 5. preced.* (nam quia AX, XB æquales (b) sunt, rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis nempe sub FA, AX, & sub FA, XB; hoc est rectangulo (c) FAB; hoc est quadrato FA). Ergo quadratum FD triplum est quadrati ex semidiametro.

Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum (d) *Per cor. 3. p. 4. l. 2.* (d) est quadrati FA; patet quadratum FD esse ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.

corol. Hinc sequitur latus æquilateri trianguli esse ad diametrum, ut radix quadratica ternarii est ad 2. radicem nempe quadraticam quaternarii, ac proinde esse lineas incommensurabiles.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19.

IN circulo quindecangulum ordinatum describere.

(e) *Per 11. l. 4.* Circulo inscribe (e) latus pentagoni AC, & trianguli (f) æquilateri latus AD. Arcum CD biseca in E. Ducta recta (f) *Per cor. 4. p. 15. l. 4.* CE est latus quindecanguli. Nam si tota peripheria statuatur esse 15. erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

Corollaria.

Fig. 19.

IHAC methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inscribentur. Nam si duarum ordinatarum latera AC, AD circulo sint inscripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, si denominatores priorum inter se multiplicentur.

Ut si AD sit latus quadrati, & AC decagoni. Denominatorum

torum differentia est 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero est 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter se multiplicati faciunt 40.

[Cor. 2. Hinc discimus arcum quadrantalem in 15. partes æquales dividere, (& proinde, continua (a) bisectione, in 30, (a) Per 30. 60, 120, &c. partes;) Si nempe arcus CE, pars decima^{l. 3.} quinta totius circumferentia, bisectione repetitâ dividatur in partes quatuor æquales. Et universaliter, si detur cujuscunque figura ordinata circulo inscripta latus BX; arcum circuli quadrantalem, repetitâ arcûs BX bisectione, in tot partes æquales, quot sunt latera figuræ, dividere licebit: & continuâ porro bisectione, secabitur arcus quadrantalis in bis, quater, octies, &c. tot partes æquales, quot sunt latera figuræ.

Cor. 3. Cum arcus circuli quadrantalis gradus 90. contineat, & unusquisque gradus scrupula prima 60; circumferentia quadrans igitur scrupula prima (90 X 60, sive) 5400. continebit. Si itaque per cor. præced. quadrans in partes 120 dividatur, earum singula scrupula prima 45 ($= \frac{5400}{120}$), nempe tres quartas unius gradus continebunt. Arcus autem adeo minutus, absque errore sensibili, in partes quotvis æquales, ac si esset (b) linea recta, dividi potest. Dividatur ita- (b) Per schol. que in tres partes æquales, quarum singula 15 scrupula prima, p. 10. l. 6. sive gradus quadrantem exhibebunt; unde etiam gradus semissem ($= 15 + 15$) & gradum integrum ($= 15 + 45$) obtinebimus. Præterea, trisectione arcûs 15^{l.}, habemus arcum 5^{l.}, & quisectione hujus, arcum unius scrupuli primi; unde obscurum esse nequit, quomodo (si circulus datus satis amplus fuerit) divisio in scrupula secunda effici poterit, atque ita porro. Quod si arcus 45^{l.} curvior videatur quam ut secaretur ad libitum ac si linea recta esset; continua tamen bisectione, ad arcum lineæ rectæ satis propinquum tandem perveniemus. Sic 22^{l.} $\frac{1}{2}$ continent tres octantes, 11^{l.} $\frac{1}{4}$ tres partes decimas sextas unius gradus; & sic porro. Liquet igitur, quomodo circulus in gradus suos, graduumque semisses, quadrantes, octantes, &c. vel, si ita lubeat, in scrupula prima, secunda, tertia; &c. mechanice saltem dividi potest.

Scholium 1. Circuli autem peripheria dividi potest Geometrice in partes

- 4. 8, 16, &c. per p. 6. l. 4. & p. 9. l. 1.
- 3. 6, 12, &c. per p. 15. l. 4. cum cor. 4. & 3.
- 5. 10, 20, &c. per p. 11. cum cor. 2. & 5. p. 10. l. 4.
- 15. 30, 60, &c. per p. 16. l. 4. cum cor. 2.]

Scholium

Scholium 2.

Nondum reperta ars est, qua solo circino & regula inscribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 14, 17, &c. cum illa inscriptio figurarum dependeat a divisione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum desideratur. Licebit tamen, circuli circumferentia in 360. partes divisa, mechanice figuras quascunque ordinatas circulo inscribere hunc in modum.

Problema 1.

Fig. 19.

GRadus 360. (hoc est, totam circumferentiam) divide per denominatorem polygoni inscribendi, (exem. gr. nonanguli.) Quot unitatibus constat quotiens (40.) tot graduum fac in centro angulum AGK. Ducta recta AK erit latus figuræ quæsitæ (nonangulæ) circulo inscribendæ.

Problema 2.

Fig. 19.

AT super data recta quamvis figuram ordinatam describes præsidio tabellæ sequentis:

Angulus rectus est ad angulum figuræ,		differ.
In Pentagono	ut 5. ad 6...	1
Hexagono	ut 3. ad 4...	1
Heptagono	ut 7. ad 10...	3
Octogono	ut 2. ad 3...	1
Enneagono	ut 9. ad 14...	5
Decagono	ut 5. ad 8...	3
Hendecagono	ut 11. ad 18...	7
Dodecagono	ut 3. ad 5...	2

Fig. 19.

Oporteat igitur super data recta XB heptagonum ordinatum describere. Centro X, radio XB describe circumulum, a quo abscinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ sit proportio recti anguli ad angulum heptagoni: reperies, ut 7. ad 10. & differentia est 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipsi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta B, X, N describe (a) circumulum: hic capiet heptagonum super data recta XB.

(2) Per 5.
l. 4.

Tabella confecta est ope theorematis 2. in schol. post 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt

efficiunt anguli cujuscunque figuræ rectilinéæ, qui numerus divisus per denominatorem figuræ, exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hætenus sunt proposita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, spatium replere possunt: Hoc est unam continuam superficiem constituere. Quod sic demonstratur. Ut aliqua figura ordinata sæpius repetita possit replere spatium, requiritur ut anguli plurium ejus speciei figurarum circa unum punctum compositi, possint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum possunt constitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera possint replere spatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, *Fig. 17.* L, K, I, H, circa punctum A compositi, efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri; nam unus facit duas tertias (a) unius recti, ac (a) *Per cor.* proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est 4. rectos;) *12. p. 32. l. 1.* item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni; (unus enim facit 4. tertias (b) unius recti ac proinde 3. (b) *Per cor.* faciunt 12. tertias unius recti, hoc est rursus 4. rectos.) *2. p. 15. l. 4.* Ergo, &c.

Quod autem id nulla alia figura possit, liquido constabit, si angulum ejus repertum, ut supra, quocunque numero multiplices: semper enim aut deficient a 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER QUINTUS.

QUINTUS hic Elementorum liber demonstrandis libri sexti propositionibus omnino est necessarius. Doctrinam quam continet frequentissime usurpamus. Argumentandi vero ratio e proportionem Geometrica petita, est plane subtilissima, solidissima, brevissima. Cujusmodi ratiocinandi methodo, tanquam Logica quadam Mathematica; Geometria, Arithmetica, Musica, Astronomia, Statica, & reliqua omnes Mathematicæ partes maxime utuntur; utpote quæ proportionibus quibusdam inter se connexis fere tota nituntur, modosque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari solent. Geometria quidem practica, quæ linearum, figurarum, atque corporum mensuras complectitur, e proportionum doctrina plerumque derivatur. Regule Arithmeticæ ad unam omnes ex hujusce quinti libri propositionibus, sine septimo, octavo, nono de numeris ex professo tractantibus, demonstrari possunt. Antiquorum Musicam proportionem Geometricas Sonorum modulaminibus applicatas rite dixeris: quod idem fere de Statica, corporum ponderibus applicata possis asserere. Ut rem totam paucis complectar, si proportionis doctrinam e Mathesi abstuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinques.

Quanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & sexto libro. Sed quamvis illi cæterisque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportionem tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, sive duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocunque numero æqualiter multi-

multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul majora, vel simul minora (a). Atque ex ea definitione omnes (a) *Hæc de-
deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediate vel immediate finitio deducit.*
deducit. Hæc est doctrinæ Euclidæ summa: quæ multi *ratur infra
plicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum post defn. 6.*
est ea definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certo liceat æquales eas esse: vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes, nihil aliud intelligi velit, quam earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex ea, rationum æqualitas certo posset inferri. Id vero minime vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstravit. Si secundum; securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absoluta rationum æqualitate. Exemplum esto prima sexti. Certi erimus ex Euclideâ demonstratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem esse rationi basium AC, & DF, per rationum æqualitatem, solam intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, basium rationibus vere & absolute æquales esse, cum demonstratum non sit affectionem illam multiplicium cum absoluta & vera rationum æqualitate necessario esse connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiat, librorum 5. ac 6. demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate semper esse connexam. Denique ut sibi constarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisque semper displicuit, & tyronibus plurimum semper faceffivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & universæ Matheseos est, ab ea labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

Fig. 2. l. 6.

Primo ostendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur, eo fere loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hæctenus, & perobscuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundo

Secundo demonstrabimus, quodcumque antecedentium quælibet æque multiplices, consequentium quibuscumque æque multiplicibus vel pariter majores sunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes esse vere æquales, seu similes. Quo stabilito, omnes Euclidæ demonstrationes, totaque illius de proportionibus doctrina subsistet; ut qui nostris probationibus contentus non sit, ad Euclidean quamvis prolixas, jam tamen securas ac solidas se possit convertere. Assignabimus item (ac demonstrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clarissimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propositiones deducere poterit qui voluerit.

Tertio, de proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione, tractatum subjungam, penitioris Geometriæ studiosis plane necessarium, ubi etiam demonstrabimus axioma illud, seu potius theorema hætenus indemonstratum, rationem extremorum ex rationibus quolibet intermediorum componi.

Tyronibus satis erit definitiones & primam partem perlegere.

[Monitum ad Tyrones.]

QUanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, ut recte notat Tacquetus, qui ignoret. Est enim ipsa quodammodo scientiarum Mathematicarum medulla; & varii de proportionalibus ratiocinandi modi, utilissimi simul sunt & certissimi; neque absque iis pedem vel hilum promovere licet. Verum hanc doctrinam animis humanis cum communi ratione quasi congenitam existimo; variosque de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro, per ambages quamplurimas, tradit Euclides, non tam demonstratione proprie dicta, quam illustratione nonnulla, & exemplis indigere censeo. Eos autem qui longo propositionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, rem per se clarissimam nube quadam involvere, & longe difficiliorem reddere omnino puto. Rei summam paucis aperiam. Notum est quatuor quantitates tum proportionales, sive analogias tum similes aut æquales esse, cum *Quantitas prima* toties continet *secundam*, quoties *tertia* continet *quartam*: vel cum *prima* toties continetur in *secunda*, quoties *tertia* continetur in *quarta*. Sic $16:8::4:2$, atque etiam $3:9::4:12$. sunt similes rationes; quoniam in exemplo priore, consequentia 8 & 2 bis in antecedentibus suis 16 & 4 respective continentur: adeoque
ratio

ratio dupla in utrisque observatur. Et in exemplo posteriore rationes sunt etiam similes, quoniam consequentia 9 & 12 ter antecedentia sua respective continent; adeoque ratio subtripla in utrisque observatur. (Neque ulla est quantitatum commensurabilium ratio quæ non possit per numeros certos; neque sane incommensurabilium ulla quæ non possit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certissime exprimi.) Ratio autem duarum quantitatum, antecedentis ad consequentem, recte per quotum ex antecedente per consequentem divisa ortum exprimitur. Sic ratio 16 ad 8 æquivalet $\frac{16}{8}$ vel $\frac{2}{1}$, sive 2; ea nempe ratio dupla est. Et ratio 3 ad 9 est $\frac{3}{9}$ sive $\frac{1}{3}$, nempe subtripla. Et ratio 8 ad 3 est $\frac{8}{3}$ sive $2\frac{2}{3}$, hoc est, ratio dupla bipartiens tertias. Ejusmodi vero quotus, Ratio- nis Exponens (~~Tacquetus (a) autem, Ratio- nis Denominator~~) (~~(a) Vide partem~~ appellatur. Porro, Ex antedictis liquet similes rationes quas- ~~3. 1. 5. 2.~~ cunque non tantum per numeros diversos, sed etiam per eos- dem rectissime exponi. Sic sane ratio dupla, sive 2 ad 1 rationem tam 16 ad 8, quam 4 ad 2 plenissime designat: Ratio subtripla, sive 1 ad 3 non minus exprimit rationem 4 ad 12, quam rationem 3 ad 9, uti oppido est manifestum. Si itaque quatuor quantitates sint proportionales, $A:B::\alpha:\beta$; quaritur in hoc quinto libro quot similibus modis hæc similes rationes mutari, atque inter se componi possint, ita ut rationes emergentes sint etiamnum utrinque similes? Responderi vero debet, modis omnino omnibus, quos quisquam imaginari queat. Cum enim tam ratio A ad B, quam ratio α ad β inter se similes sint, per eosdem numeros exprimi utraque poterunt hoc modo, $A:B::9:3::\alpha:\beta::9:3$. Atque proinde omnes omnino rationes utrinque aut Alternando, aut Invertendo, aut Componendo, aut Dividendo, aut Convertendo, aut Miscendo emergentes, per eosdem plane numeros exprimentur; & eandem proinde rationem utrinque servabunt. Sic e. g. $A+B:B::\alpha+\beta:\beta$; quia utramque proportionem exprimit $9+3:3$; quæ est rationis compositio. Neque aliter de reliquis est censendum. Hoc itaque tantum observent Tyrenes, ut rationes quas tractant ubique similes, modo plane simili mutantur & ordinentur. Neque exinde locus erit dubitationi, quin ex hujusmodi ordinatione aut mutatione consimili, rationes ubique consimiles sint oriundæ. Mirari autem subis eorum neminem qui elementa Geometrica hæcenus condiderunt, facillimum hoc æqualium rationum indicium illustrando huic libro quinto, & proportionum doctrinæ facilius explicandæ adhibuisse. En vero modos primarios de similibus rationibus argumentandi, quos adhibet Geometria, in brevem Tabellam conjectos:

Sit $A : B :: \alpha : \beta :: 9 : 3.$
 Erit ergo
 Alternando sive } $A : \alpha :: B : \beta :: 9 : 9 :: 3 : 3.$
 permutando, }
 Invertendo, $B : A :: \beta : \alpha :: 3 : 9.$
 Componendo, $A+B : B :: \alpha+\beta : \beta :: 9+3(12) : 3.$
 Dividendo, $A-B : B :: \alpha-\beta : \beta :: 9-3(6) : 3.$
 Convertendo, $A : A+B :: \alpha : \alpha+\beta :: 9 : 9+3(12.)$
 vel $A : A-B :: \alpha : \alpha-\beta :: 9 : 9-3(6.)$
 Mixtim, $A+B : A-B :: \alpha+\beta : \alpha-\beta :: 9+3(12) : 9-3(6.)$
 Ex aquo sit $A : B :: \alpha : \beta.$ & $B : C :: \beta : \gamma.$ Erit $A : C :: \alpha : \gamma.$
 $9 : 3 :: 9 : 3.$ & $3 : 1 :: 3 : 1$ Erit $9 : 1 :: 9 : 1.$ Ubi ratio
 A ad C (sive 9 ad 1) componi dicitur ex rationibus A
 ad B , & B ad C , (vel ex 9 ad 3 , & 3 ad 1 .)

Ex aquo perturbate sit $A : B :: \alpha : \beta.$ $8. 3 :: 16. 6.$

Et $B : C :: \beta : \alpha.$ $3. 2 :: 24. 16.$

Erit $A : C :: \delta : \beta.$ $8. 2 :: 24. 6.$

Ubi, sicut ratio A ad C (sive 8 ad 2) componitur ex rationibus A ad B , & B ad C (vel ex 8 ad 3 , & 3 ad 2) directe positus; sic ratio δ ad β (sive 24 ad 6) componitur ex rationibus δ ad α , & α ad β (sive ex 24 ad 16 , & 16 ad 6) sed transpositis.

Ceterum de compositione rationum vide plura in def. 5. libri 6.

Denique si fuerit $A : B :: C : D :: 9 . 8.$

Et $\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: 3 . 4.$

Erit $A \times \alpha : B \times \beta :: C \times \gamma : D \times \delta :: 27 . 32.$

Et $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{C}{\gamma} : \frac{D}{\delta} :: 3 . 2.$

Qui itaque hosce de proportionalibus ratiocinandi modos probe callet, eosque pro re nata in usum proferre novit, propositionibus libri quinti particularibus (nisi forte illis qua mere sunt axiomata sua luce clarissima,) perraro indigebit. Unde sane, si mihi esset integrum, rationum doctrinam sine methodo Euclidea a primordiis tradidissem: sed cum Tacquetum nostrum; ordinis Euclidei ubique observantissimum, eumque integrum Lectori propinare certum sit, pluribus supersedebo.

Hec monuit Vir ille Clariss. mihiq; amicissimus qui editionem primam Cantabrigiensem recensuit. Atqui velim potius ut ipsum Tacquetum hoc loco audiant Tyrones, ac definitionibus, primaeque parti hujus libri incumbant: quorum notitia cum modico tempore & nullo fere negotio acquiri potest, haud temere omitti debet; maxime, cum ipsa propositiones Euclidea passim in aliis libris mathematicis laudentur,

quis

quin & earum nonnulla, haud paucis quæ in hisce elementis postea traduntur, facilius intelligendis, perutiles videantur, sibi non necessaria. Nolim tamen ut ea quæ in hoc monito continentur, negligant Tyrones, sed potius ut antequam librum sextum aggrediantur, præcipuos ex analogia ratiocinandi modos, perlecto hoc compendio, memoria infigant. Porro, reliquas hujus l. 5. partes duas, 2. & 3. monente etiam Tacqueto, tyronibus omittere licebit. Et quidem, ea quæ continent, vera atque accurata esse omnia, polliceri non ausim.]

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur:

DEFINITIONES.

1. **P**ars aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, sive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis est pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, est pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter excedit. [Et hujusmodi quidem pars aliquanta est toti commensurabilis: si vero e quadrati cujusvis diametro sumatur recta lateri illius quadrati æqualis; ejusmodi recta erit pars aliquanta quidem diametri, sed toti incommensurabilis. Vide Schol. p. 47. l. 1.]

2. Magnitudo magnitudinis multiplex est, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota est; sive cum major minorem aliquoties continet præcise.

3. Ratio sive proportio, est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportionem duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primo nominatur, sive is qui nominandi casu effertur: alter Consequens.

Cum antecedens & consequens sunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur esse proportio inæqualitatis: [Et quidem majoris inæqualitatis, si terminus antecedens sit consequente major, minoris si minor.]

4. Ratio seu proportio rationalis est, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest.

Proportio irrationalis est, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest. [*Sic proportio 2 ad 1 rationalis est: Sed $\sqrt{2}$ ad 1 est proportio irrationalis; nam $\sqrt{2}$ nullis numeris explicari potest.*]

Porro commensurabiles quantitates sunt, quas aliqua communis mensura metitur; incommensurabiles, quas nulla metitur mensura communis.

Fig. 1. l. 5. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) sunt similes, æquales, eadem; cum unius antecedens (A) æque seu eodem modo (hoc est nec magis, nec minus) continet suum consequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet suum consequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in suo consequente (B,) quo (C) antecedens alterius in suo (D.) [*Quantitates autem eandem habentes rationem, proportionales vocantur.*]

Fig. 3. 6. Duæ rationes sunt dissimiles, siue una ratio est maior altera, quando unius antecedens (I) magis continet suum consequens (L,) quam alterius antecedens (O) contineat suum consequens (Q;) vel quando antecedens unius,

Fig. 4. minus continetur in suo consequente, quam antecedens alterius contineatur in consequente suo.

Proportionum aequalitas & inequalitas explicatur.

Fig. 1. Quid porro sit unum antecedens æque, vel magis continere suum consequens, quam antecedens alterum contineat suum, si proportionales sint rationales, definiri & explicari ulterius potest per numeros: ut si A sit triplum B, & C triplum F; perspicuum erit, quid sit, A æque seu eodem modo continere B, quo C continet F: vel si I sit triplum L, O vero duplum Q; constabit rursus, quid sit I magis continere L, quam O contineat Q. At si proportionales fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec potest, nec debet. Dentur magnitudines incommensurabiles, A, B: perspicuum est A non solum majus esse B, sed etiam certo quodam modo esse majus; (A quippe aliter continet B, quam alia quælibet major minorve quam A:) neque tamen ulterius quæri, aut explicari debet, quis sit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitatibus, non debet ulterius quæri, quid sit unam certo modo continere alteram; ita neque cum dantur quatuor proportionales incommensurabiles, quæri debet ulterius, quid sit C eodem modo continere.

Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 5.

nere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius est inexplicabilis; ita plane etiam identitas modi quo A continet B, cum modo quo C continet D, ulterius inexplicabilis est. [*Identitas autem illorum modorum, ex definitione Euclidea rationum aequalium, de qua infra, vel ex altero illo, quod sequitur, rationum aequalium indicio Tacquetiano, satis pro rei natura, videtur explicari.*]

Quod vero cuicumque proportioni irrationali A ad B, da- Fig. 5.
biles sint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diversis terminis constantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C. Et auferatur B ex A incommensurabili secum quantitate, quoties potest, puta ter: & supersit EF. Sit deinde O tertia pars ipsius C. Sit insuper quæpiam X ipsi C incommensurabilis, quæ major sit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter; C vero continet X minus quam ter, (nam C continet præcise ter O minorem quam X;) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiat jam Q, quarta pars C, & quæpiam esto Z, ipsi C incommensurabilis, quæ minor sit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus quam quater; C vero continet Z plus quam quater, (cum C præcise quater contineat Q, majorem quam Z;) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B.

Jam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rursum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quam A ad B; manifestum est etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere rationem quam A ad B. Quod quidem perinde clarum est lumine naturali, atque istud: dabile est majus quam P, & dabile est minus quam P, ergo dabile est æquale aliquod ipsi P.

*Quid in proportionum aequalium definitione
Euclidea desideretur.*

Q Uod ad Euclidem attinet, is duas proportionem A ad B, Fig. 21,
C ad F æquales esse dicit, cum antecedentium quæcunque æque multiplices I, Q, consequentium quibuscumque æque multiplicibus L, R, vel simul majores sunt, vel simul minores, vel simul æquales: hoc est, cum I superante L, etiam Q semper superat R; & cum I superatur ab L, etiam Q semper superatur ab R; & cum I est æqualis L, etiam Q semper est æqualis R. Ubi bene notandum est, Euclidem non assumere æque multiplicium excessus defectusque

proportionales, seu similes, sic enim inepte idem per idem explicasset; sed excessus & defectus simpliciter. Nihilominus hic aliquid in summo Geometra desiderari jam supra declaravimus. Nam vel cupit hinc verbis rationes æquales definire, & sic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe est, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: Vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & sic demonstrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita semper esse connexam, ut ex illo certo possit inferri; quæ quidem connexio & perobscura & demonstratu difficilis est: Vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quam simultaneum illum excessum defectumve multiplicium; Et sic toto 5. ac 6. libro, cum quatuor magnitudines proportionales esse demonstrat, nihil sciemus aliud, quam dictum excessum & defectum illis competere, incerti plane, utrum magnitudines de quibus agitur, sint vere proportionales.

[Cum in definitione rationum æqualium Euclides nihil aliud, quam quo sensu voces illas acceperit, pro more Mathematicorum ostendere voluerit; non video cur eâ propter tantopere culpandus sit: maxime, cum definitio Euclidea omnibus omnino rationibus æqualibus vere conveniat, siue rationales fuerint, siue irrationales, ut in parte 2. hujus lib. 5. Tacquetus ipse demonstrat, quod etiam cuilibet ipsam definitionem accuratius perpendenti, satis manifestum erit. Vide quæ ad def. 36. l. 1. notavimus: ad eundem enim lapidem utrobique offendit noster. Cum tamen Tacqueti methodum necesse est ut sequamur; videamus tandem, quodnam aliud rationum æqualium indicium universale nobis exhibet.]

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile assignatur.

Quod si rationum æqualium desideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale assignabimus, demonstrabimusque theor. 5. & 6. partis 2. [At verò demonstratione operosa non videtur indigere hoc rationum æqualium indicium; ex definitionibus enim quinta & sexta immediate fluit; vel potius, tanquam definitionum istarum illustratio quædam existimari debet.] Estque ejusmodi.

Rationes [majoris inæqualitatis] æquales sunt, (AB ad CF; GM ad NQ;) quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque, in antecedentibus æquali semper numero continentur.

Ut

Ut si una decima ipsius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM; & si una centesima CF contineatur millies in AB, etiam una centesima NQ contineatur millies in GM, & sic deinceps in infinitum; erit AB ad CF, ut GM ad NQ. [Ita enim fiet ut (secundum def. quintam) prioris rationis antecedens AB aequae seu eodem modo (hoc est, nec magis nec minus) contineat suum consequens CF, quo posterioris antecedens GM continet suum consequens NQ.]

Vel si minoris inequalitatis rationes, CF ad AB; NQ ad GM ponantur aequales; tum antecedentes ipsae, & antecedentium similes partes aliquotae quacunque, in consequentibus suis aequali semper numero continebuntur. Hoc enim rursum postulat def. quinta, ut scilicet antecedens CF eodem modo contineatur in suo consequente AB, quo antecedens NQ in suo GM.]

Inaequales autem rationes sunt, quando aut consequentes ipsae, aut consequentium aliquae similes aliquotae in antecedentibus inaequali numero continentur. Et illa ratio major est, cujus vel consequens, vel consequentis aliquota, saepius continetur in antecedente.

Ut si una centimillesima CF saepius contineatur in AB, *Fig. 16.* quam una centimillesima NQ, in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliae consequentium CF, NQ similes aliquotae in antecedentibus AB, GM aequali numero containerentur. [Sequitur ex def. 6.]

Porro aequali numero contineri dicuntur, cum ablatae quoties possunt, aequali numero sunt ablatae.

Ex hoc indicio, rationum irrationalium aequalitas & inaequalitas continuo elucescit, cum sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata consequentibus commensurabilia & proportionalia exhaustantur.

7. Similes partes sunt, quae in suis totis aequae, seu eodem modo continentur, ut qualis pars sui totius est una, talis pars sui totius sit altera. Quod sane nihil aliud est, quam partes ad sua tota [vel etiam tota ad partes suas] eandem habere rationem, [sive partes illa totis suis commensurabiles fuerint, seu incommensurabiles.]

Similes vero partes aliquotae sunt, quae sua tota aequaliter metiuntur; ut si utraque sit sui totius una tertia, una decima, &c.

8. Magnitudines (A, B, C, D) continue proportionales *Fig. 6.* dicuntur, cum medii termini (B, C) bis sumuntur; hoc est, cum sunt consequens respectu praecedentis, & antecedens respectu sequentis.

Continuas rationes sic efferimus: A est B, ut B ad C; & B est ad C, ut C ad D; & sic deinceps.

9. Magnitudines discretim proportionales sunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1.

Discretas rationes sic efferimus: A est ad B, ut C ad F.

Cum plures fuerint proportionales magnitudines quam tres, si proportionales dicantur, semper intelligitur discretim.

Fig. 6.

10. Cum magnitudines (A, B, C, D) fuerint continue proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad secundam (B); & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad secundam (B); & sic deinceps.

[Item, prima (A) ad secundam (B) subduplicatam (sive dimidiatam) rationem habere dicitur ejus rationis quam habet eadem prima (A) ad tertiam (C), & subtriplicatam ejus rationis quam habet prima (A) ad quartam (D); & sic deinceps.

Si vero ratio aliqua triplicata, sit alteri rationi duplicata aequalis; erit ratio simplex posterior, rationis simplicis prioris sesquuplicata sive sesquialtera. Sint A, B, C, D $\div \div \div$; & α, β, γ $\div \div \div$; & sit A prima ad D quartam in priore analogia, ut α prima ad γ tertiam in secunda analogia; dico quod α est ad β in ratione sesquialtera rationis A ad B. Sit enim F inter B & C, sive quod perinde est, inter A & D media proportionalis: Ob aequales rationes A ad D & α ad γ , & medias proportionales utrinque F & β , Erit A: F :: α : β . Sed ratio A ad F componitur ex ratione integra A ad B & ex dimidiata quoque ejusdem ratione B ad F atque adeo ratio α ad β rationi A ad F aequalis, continet rationem A ad B integram, & etiam rationem ejusdem dimidiatam, nempe rationem B ad F. Ratio vero integra & dimidiata dicitur ratio sesquuplicata sive sesquialtera. Est ergo α ad β in ratione sesquuplicata sive sesquialtera A ad B. Sic sane in Astronomicis, cum cubi distantiarum planetarum a Sole eam inter se rationem habeant quam temporum periodicorum quadrata; ita ut triplicata distantiarum ratio eadem sit cum ratione temporum periodicorum duplicata; (Cubi enim sunt in (a) triplicata, & quadrata sunt (b) in duplicata ratione laterum suorum, sive radicum, respective;) dici solet, tempora ipsa periodica esse inter se in ratione sesquuplicata sive sesquialtera distantiarum a Sole.]

(a) Per 33.

l. 11.

(b) Per 20.

l. 6.

11. Homologæ, seu similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, consequentes consequentibus.

bus. Ut si A est ad B , ut C ad F ; homologæ erunt A , Fig. 1. C ; & B , F .

Reliquæ definitiones commodius ex ipsis propositionibus intelligentur.

Quintus liber propositiones complectitur 25. Ex his 10. non alium usum habent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonstrantur. Illis igitur prætermis, 15. reliquas proponemus solas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theorematum non solis lineis, sed omnibus omnino quantitativis conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitativis repræsentant.

Axioma.

Datis tribus quantitativis A , B , C , dabilis est quarta Z , ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B .

PROPOSITIO I, II, III, IV, V, VI.

IN nostra methodo sunt superflue. [Inter has insignior & usus frequentioris est prop. 4. cujus demonstratio habetur infra. Est enim Lem. 1. par. 2. hujus libri 5.]

PROPOSITIO VII.

SI quantitates A & B fuerint æquales, & alia Fig. 7. quæpiam detur Z : erit A ad Z , ut B est ad Z . Et Z erit ad A , ut eadem Z est ad B .

Hæc propositio, uti & sequentes quatuor, sunt merissima axiomata, ac proinde nullo modo demonstrari debent.

[Scholium. Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem; hoc est, si detur etiam alia quantitas X , ipsi Z æqualis; erit A ad X , ut B est ad Z ; & vice versa. Sic etiam propositionum 3. sequentium patebit adhuc veritas, si loco unice quantitativis Z , ubique ponantur duæ æquales, X & Z .]

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8.

SI quantitates (C & F) fuerint inæquales; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z . [Item minor F minorem habet rationem ad Z , quam habet major C ad Z .]

Et Z ad majorem C , minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F , quæ minor est quam C . [Et Z ad minorem F , majorem habebit rationem, quam habet eadem Z ad C quæ major est.]

PROPOSITIO IX.

Fig. 7.

SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales sunt A & B .

Et si eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rursum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8.

SI C ad Z majorem rationem habeat, quam F ad Z ; erit C major quam F . [Et proinde, si F minorem habeat rationem ad Z , quam habet C ad Z ; F minor erit quam C .]

Et si Z ad F majorem rationem habeat, quam eadem Z ad C ; erit F minor quam C . [Et si Z ad C minorem rationem habeat, quam habet eadem Z ad F ; erit C major quam F .]

PROPOSITIO XI.

Fig. 9.

Rationes, quæ eidem rationi sunt æquales, eadem, similes, (idem omnia significant;) sunt æquales, eadem, similes inter se.

Ut si tam ratio A ad B , quam ratio C ad F , sint æquales rationi X ad Z , erunt quoque rationes A ad B , & C ad F æquales

æquales inter se. Sive si A sit ad B , ut X ad Z ; & C sit ad F , ut X ad Z ; erit quoque A ad B , ut C ad F .

[Scholium.] Eodem modo rationes, quæ æqualibus sunt æquales, inter se sunt æquales. [Et rationes quæ unâ æqualium rationum majores vel minores sunt, etiam alterâ æqualium majores vel minores erunt: aut si æqualium rationum una quavis, ratione tertiâ major fuerit vel minor, etiam altera æqualium eâdem tertiâ major vel minor erit respective.]

Ex. gr. Si A sit ad B ut C ad F ; & sit ratio C ad F major ratione X ad Z ; Erit quoque ratio A ad B major ratione X ad Z ; quæ ipsa est prop. 13. a Tacqueto omissa. Eodem modo si fuerit A ad B ut X ad Z ; & fuerit ratio X ad Z minor quam ratio C ad F ; erit etiam ratio A ad B minor ratione C ad F .]

PROPOSITIO XII.

SI singule magnitudines quoruncque (A , B , C ,) Fig. 10.
eandem habuerint proportionem ad singulas totidem (F , I , L :) quam proportionem habent singule ad singulas, sive una (A) ad unam (F ;) eandem habebunt omnes (A , B , C) simul sumptæ, ad omnes (F , I , L) simul sumptas.

Rem per se manifestam exemplo tantum aliquo rationali declaro; ut si singulæ A , B , C , singularum F , I , L , sint triplæ, (hoc est, si singulæ ad singulas eandem habeant rationem quam 3. ad 1.) etiam A , B , C simul sumptæ, simul sumptarum F , I , L triplæ erunt, (hoc est, etiam A , B , C simul sumptæ ad F , I , L simul sumptas rationem habent eandem, quam 3. ad 1.) In proportionem irrationali res æque clara est.

[Propositionem 13. in Scholio post pr. 11. supra collocavimus; demonstratione enim vix eger. Sequens autem propositio 14. etsi Tacqueto superflua, usum suum habet, atque adeo illam in locum suum reduxi cum demonstratione sua.]

PROPOSITIO XIV.

SI prima (A) sit ad secundam (B ,) ut tertia Fig. 11.
(C) ad quartam (F ;) & sit prima (A) major quam tertia (C ,) erit secunda (B) major quam quarta (F :) Si vero prima sit æqualis tertiæ, erit secunda quartæ æqualis: Et si minor, minor.

Si

- Si data fuerit proportio aequalitatis, ubi antecedentia consequentibus suis aequalia sunt, propositio per se patet. Et (a) cum, in proportionem maioris inaequalitatis, unius antecedens aequale seu eodem modo contineat suum consequens quo alterius antecedens continet suum consequens; atque in proportionem inaequalitatis minoris, antecedens unius eodem modo contineatur in suo consequente quo antecedens alterius in suo continetur; etiam in proportionem inaequalitatis maioris vel minoris, propositio satis patebit attendenti. Si quis tamen amplio rem demonstrationem velit, legat ea quae sequuntur.
- (a) Per def. 5. l. 5. 1. Sit A maior quam C , eritque ratio A ad B (b) maior ratione C ad B . Sed est (c) A ad B ut C ad F : ergo ratio C ad F major (d) est ratione C ad B : (e) unde F minor est quam B , & proinde B maior quam F .
- (b) Per 8. l. 5. 2. Sit A aequalis ipsi C ; erit ratio A ad B (f) aequalis rationi C ad B : Sed est A ad B ut C ad F : erit (g) igitur C ad B ut C ad F , ac proinde B & F (h) aequales erunt.
- (c) Per 7. l. 5. 3. Sit A minor quam C ; & habebit A ad B minorem (i) rationem quam habet C ad B . Est autem A ad B ut C ad F : ergo C (k) minorem habet rationem ad F quam habet eadem C ad B ; & proinde F (l) maior est quam B , seu B minor quam F .]
- (d) Per schol. post p. 11. l. 5. (l) Per 10. l. 5.

PROPOSITIO XV.

Fig. 10.

A Liquotæ similes (F, I) eandem inter se rationem habent quam tota (A, B .)

Fig. 11.

Et universim, partes similes (C, F) sunt inter se ut tota (A, B .) [sive partes illæ totis suis fuerint commensurabiles, sive non fuerint.]

Vere instar axiomatis haberi potest, si recte intelligatur quid sint partes similes. Vide defin. 7.

Fig. 12.

[Schol. Partes similes CB, LI , si a totis suis AB, FI auferantur, relinquunt partes similes AC, FL ; quod per se satis manifestum est.]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 1.

SI prima (A) sit ad secundam (B .) ut tertia (C) ad quartam (F ;) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C .) ut secunda (B) ad quartam (F .)

Ponantur.

Ponantur B & F esse minores quam A & C; (nam si e-
quales sint, res patet;) [Tunc enim, aequales A & B ad a-
quales C & F eandem rationem (a) habebunt, ut sit A:C::B:(a) Per sch.
F.] Quoniam A ponitur esse ad B, ut C ad F, erunt per post. p. 7. l. 1.
defin. 7. B & F, totorum A & C partes similes, ac proin-
de per præc. quam proportionem inter se habent tota A,
C, eam quoque habent partes similes B, F; hoc est, A est
ad C, ut B ad F. [Eodem modo si antecedentes A & C mi-
nores fuerint consequentibus B & F respective; cum sit A:(b) Per def.
B::C:F, (b) erunt A & C partes similes totorum B & F, (c) Per 15.
& (c) proinde A:C::B:F.] l. 5.

Scholium.

SI A est ad B, ut C ad F; etiam invertendo erit ut B ad
A, sic F ad C. Per se patet.

Apud Euclidem hoc est corollarium prop. 4. quæ cum in
nostra methodo tanquam superflua sit omissa, visum est
corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) sit ad consequens (CB), Fig. 12.
ut antecedens alterum (FI) ad consequens alte-
rum (LI); etiam dividendo erit (AC) excessus an-
tecedentis primi supra suum consequens, ad idem con-
sequens (CB;) ut (FL) excessus antecedentis secundi
supra consequens secundum, ad secundum conse-
quens (LI.)

Axiomatis instar assumi potest: si tota AB, FI eandem
rationem habeant ad X & Z; etiam similibus partibus mul-
tata, eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc est,
adhuc AB sic multiplicata erit ad X, ut FI sic multiplicata ad Z.
Id vero est quod asserit propositio. Nam quia ponitur AB
esse ad CB, ut FI ad LI, erunt (d) CB, LI similes partes (d) Per def.
totorum AB, FI; & AC, FL erunt tota similibus partibus 7. l. 5.
multiplicata. Cum ergo tota habuerint ad CB, LI eandem ra-
tionem; etiam AC, FL, (hoc est tota similibus partibus
multiplicata) pergent ad CB, LI eandem inter se habere ratio-
nem; hoc est, adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

[Aliter. Cum sit AB:CB::FI:LI; (e) ergo CB, LI sunt (e) Per def.
similes 7. l. 5.]

- similes partes totorum AB, FI, & proinde si a totis suis auferantur, (a) relinquantur similes partes AC, FL totorum AB, FI.*
 (a) Per sch. p. 15. l. 5. Unde (b) $AB:FI::AC:FL$; & ob eandem causam $AB:FI::$
 (b) Per 15. l. 5. $CB:LI$. Ergo (c) $AC:FL::CB:LI$. Et permutando, $AC:$
 (c) Per 11. l. 5. $CB::FL:LI$. Q. E. D.]

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12. **S**I antecedens unum (AC) sit ad consequens unum (CB,) ut antecedens alterum (FL) ad consequens alterum (LI;) etiam componendo erit (AC cum BC) primum antecedens cum suo consequente, ad idem consequens (CB,) ut (FL cum LI) secundum antecedens cum suo consequente, ad consequens (LI.)

Rursum enim instar axiomatis assumi poterit: si duæ quantitates AC, FL, eandem ad X & Z habeant rationem; etiam AC, FL similiter, seu proportionaliter auctæ, pergunt ad X & Z eandem habere rationem: hoc est, adhuc erit AC sic aucta ad X, ut FL sic aucta ad Z. Id vero est quod propositio asserit. Nam ponitur AC esse ad CB, ut FL ad LI. Quare si ipsis AC, FL addantur CB, LI; erunt AC, FL proportionaliter, seu similiter auctæ. Cum igitur AC, FL eodem modo se habeant ad CB, LI; etiam cum similiter fuerint auctæ, (hoc est, ipsæ jam AB, FI) pergunt ad easdem CB, LI eodem modo se habere; hoc est, adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

- [Aliter. cum sit $AC:CB::FL:LI$; ergo (d) permutando, erit $AC:FL::CB:LI$. Ergo (e) $AC+CB:FL+LI::$ (hoc est, $AB:FI::$) $CB:LI$; & iterum (f) permutando, $AB:CB::FI:LI$. Q. E. D.]
- (d) Per 16. l. 5.
 (e) Per 12. l. 5.
 (f) Per 16. l. 5.

Corollarium I.

Fig. 12. **S**I antecedens unum (AB) fuerit ad consequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad consequens alterum (LI;) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum (FI) est ad (FL) excessum suum supra consequens alterum (LI.)

(g) Per 17. l. 5. Cum enim AB sit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo (h) Per sch. p. 16. l. 5. (g) AC ad CB, ut FL ad LI: & invertendo (h) BC ad CA; (i) Per 18. l. 5. ut IL ad LF: & componendo (i) BA ad CA, ut IF ad LF.

Hæc

Hæc argumentatio vocatur *conversio* rationis.

[Et præterea, si fuerit unum antecedens (AC) ad consequens suum (CB,) ut alterum antecedens (FL) sit ad suum consequens (LI;) erit etiam, ex alia convertendi specie, antecedens primum (AC) ad primum antecedens cum suo consequente (AB,) ut antecedens alterum (FL) ad alterum antecedens cum suo consequente (FI)]

Cum enim sit $AC:CB::FL:LI$; erit (a) invertendo, $BC:(a)$ Per sch. $CA::IL:LF$; & (b) componendo, $BA:AC::IF:FL$; & rursum invertendo, $AC:AB::FL:FI$. P. 16. l. 5.
(b) Per 13. l. 5.

Corollarium 2.

SI AC est ad AB, ut FL ad FI; erit quoque AC ad CB, Fig. 12. ut FL ad LI; & AB ad CB, ut FI ad LI.

Cum enim sit ut AC ad AB, sic FL ad FI, erit invertendo, BA ad CA, ut IF ad LF: & divid. (c) BC ad CA, ut IL ad LF: & rursum invertendo, AC ad CB, ut FL ad LI: & compon. (d) AB ad CB, ut FI ad LI. (c) Per 17. l. 5.
(d) Per 18. l. 5.

[Aliter. cum sit $CA:AB::LF:FI$; erit invertendo, $BA:AC::IF:FL$, & (e) convertendo, $AB:BC::FI:IL$, quod erat unum: & (f) dividendo, $AC:CB::FL:LI$, quod erat alterum.] (e) Per cor. 1. huius.
(f) Per 17. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (AB) est ad totum (FI,) ita ablatum (CB) sit ad ablatum (LI,) etiam ut totum est ad totum, ita reliquum (AC) erit ad reliquum (FL.) Fig. 12.

Omnino clarum est per se. Potest tamen ex præcedentibus sic ostendi. Quoniam AB est ad FI, ut CB ad LI; erit permutando (g) AB ad CB, ut FI ad LI. Ergo per conversionem rationis AB est ad AC, ut (h) FI ad FL. Ergo permutando, ut AB ad FI, ita AC ad FL. (g) Per 16. l. 5.
(h) Per cor. 1. præc.
(i) Per 16. l. 5.

[Aliter. Cum sit $AB:FI::CB:LI$, (sive permutando, $AB:CB::FI:LI$;) (k) erunt CB, LI partes similes totorum AB, FI, & proinde si a totis suis auferantur, (l) relinquantur partes similes AC, FL. (m) Ergo $AB:FI::AC:FL$.] (k) Per def. 7. l. 5.
(l) Per sch. p. 15. l. 5.
(m) Per 15. l. 5.

PRO.

PROPOSITIO XX. & XXI.

IN nostra methodo sunt superflua. [Habentur tamen in coroll. prop. 22. & 23. quæ sequuntur.]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

SI fuerit A ad B , ut O ad Q ; & B ad C , ut Q ad R , & sic deinceps: erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R .

Ponantur C , R esse minores quam B , Q : eadem foret
 (a) Per hyp. ostensio, si majores ponerentur. Quoniam (a) B est ad C ,
 (b) Per def. ut Q ad R ; erunt C , R totorum B , Q (b) partes similes.
 7. l. 5. Cum igitur A & O ad B & Q eandem habeant rationem;
 habebunt quoque ad C & R , quæ sunt ipsorum B & Q
 partes similes, eandem rationem. Instar enim axiomatis
 est, si duæ quantitates ad alias duas eandem inter se habu-
 erint rationem, etiam ad partes earum similes, eandem in-
 ter se habere rationem.

Si plures fuerint utrimque quantitates quam tres, eodem
 ratiocinio procedatur ad reliquas.

(c) Per 16. [Aliter. cum sit $A:B::O:Q$; erit (c) permutando, $A:$
 l. 5. $O::B:Q$. Et cum sit $B:C::Q:R$; erit permutando, $B:Q$
 (d) Per 11. $::C:R$. Ergo (d) $A:O::C:R$; & iterum permut. $A:C::$
 l. 5. $O:R$.

Cor. 1. Hinc prop. 20. a Tacqueto omissa deduci potest.
 Sint enim tres quantitates A , B , C , tribus O , Q , R propor-
 tionales, bina binis; hoc est, sit $A:B::O:Q$, & $B:C::Q:R$;
 Si A fuerit major quam C , erit ex æquo O major quam R ;
 & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Nam per hanc
 prop. erit $A:C::O:R$; & permutando, $A:O::C:R$. Ergo
 per 14. hujus libri, liquet propositum.

(e) Per 18. Cor. 2. Cum sit $A:B::O:Q$; erit (e) componendo, $A+$
 l. 5. $B:B::O+Q:Q$. Est autem $B:C::Q:R$. Ergo per hanc
 (f) Per 17. prop. erit $A+B:C::O+Q:R$. Et pari modo, si (f) divi-
 l. 5. sionem pro compositione adhibeas, erit $A-B:C::O-Q$
 R .]

PRO

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit ut A prima ad B secundam, ita O prima ad Q secundam; & ut B secunda ad C tertiam, ita tertia quapiam R ad primam O ; erit ex æquo [perturbate] ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q secundam.

Ut B est C , ita (a) potest Q esse ad aliquam quampiam S . Jam quia ut B ad C , sic (b) R est ad O , & ut B ad C , sic Q est ad S ; erit R ad O , (d) ut Q ad S . Igitur permutando (e) R est ad Q , ut O ad S . Deinde, quia O est ad Q , ut (f) A ad B , & Q est ad S , (g) ut B ad C ; ex æquo erit O ad S , ut (h) A est ad C . Sed jam ostendi R esse ad Q , ut O est ad S . Ergo etiam (i) R est ad Q , ut A ad C .

Vocatur a Geometris hæc ratio perturbata.

[Coroll. Sint tres quantitates A , B , C , tribus R , O , Q proportionales, bina binis, sed perturbate; hoc est, sit $A: B:: O: Q$; & $B: C:: R: O$; si A fuerit major quam C , erit ex æquo R major quam Q ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Nam per hanc prop. erit $A: C:: R: Q$; & permutando, $A: R:: C: Q$. Ergo per 14. hujus libri liquet propositum. Hac vero est prop. 21. prius omissa.]

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B , ita C ad F ; & ut I ad B , ita L ad F : erit ut A cum I ad B ; ita C cum L ad F .

Quoniam I per hyp. est ad B , ut L ad F ; erit quæ (k) invertendo B ad I , ut F ad L . Cum igitur A sit ad B , (l) ut C ad F , & B ad I , ut F ad L ; ex æquo erit (m) ut A ad I , sic C ad L . Igitur (n) componendo ut $A I$ est ad I , sic CL est ad L : I vero est ad B , (o) ut L ad F . Rursum igitur (p) ex æquo AI est ad B , ut CL ad F .

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16. **S**I quatuor magnitudines (AB , CF , I , L) fuerint proportionales; maxima (AB) & minima (L) duabus reliquis (CF , I) majores erunt.

Sit AB ad CF , ut I ad L . Ex maxima AB sumatur AQ æqualis I ; & ex CF sumatur CR par minimæ L . Erit igitur AB tota ad totam CF , ut ablata AQ ad ablatam CR . Ergo reliqua QB est ad reliquam (a) RF , ut tota AB ad totam CF . Sed AB major (b) est quam CF . Ergo & QB major quam RF . Jam vero quia AQ ipsi I , & CR ipsi L æquales sunt; etiam AQ cum L , ipsi I cum CR æquales erunt. Quare si ad AQ cum L addatur majus QB , & ad I cum CR addatur minus RF ; erit totum AQB cum L majus toto I cum CRF . Quod erat demonstrandum.

Fig. 6. [Corol. Si tres magnitudines, A , B , C , fuerint proportionales; extremarum semisumma mediâ major erit. Cum enim (c) A ad B ut B ad C , erit (per hanc pr.) summa extremarum A & C major quam B bis sumpta, & (d) proinde semisumma extremarum major erit quam B semel sumpta.]

Quæ sequuntur non sunt propositiones Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, aliisque desumptæ, ob frequentem earum usum Euclideis subjungi solent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17. **S**I prima (A) ad secundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F); habebit invertendo (B) secunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam.

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam C ad F : Igitur A ad (e) aliquam BX (quæ (f) ante 1. l. 5. major erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F . Invertendo igitur erit BX ad A , ut F ad C ; [Sed (g) B est ad A in minori (g) ratione quam BX ad A ;] ac proinde (h) B ad A in minori ratione erit, quam F ad C . [Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori: hoc est, si B ad A minorem habeat rationem quam F ad C ; habebit invertendo, A ad B majorem rationem quam C ad F .]

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

SI *A* habet ad *B* majorem rationem quam *C* ad *F*; *Fig. 17.*
F; etiam permutando *A* ad *C* majorem ra-
 tionem habebit, quam *B* ad *F*.

Quoniam ratio *A* ad *B* ponitur major ratione *C* ad *F*; (a) *Per axio.*
 erit (a) ratio *A* ad aliam *BX* (quæ necessario major est ante 1. l. 5.
 quam (b) *B*) æqualis rationi *C* ad *F*. Jam igitur (c) per- (b) *Per 10.*
 mutando *A* erit ad *C*, ut *BX* ad *F*. Sed *BX* ad *F* est in (c) *Per 16.*
 majori ratione, (d) quam *B* ad *F*. Ergo (e) etiam *A* est l. 5.
 ad *C* in majori, quam *B* ad *F*. (d) *Per 8. l. 5.*

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionibus (e) *Per schol.*
 minori, p. 11. l. 5.

PROPOSITIO XXVIII.

SI *AB* ad *BC* majorem rationem habet, quam *FI* *Fig. 18.*
 ad *IL*; etiam componendo *AC* ad *BC* ma-
 jorem rationem habet, quam *FL* ad *IL*.

Quoniam ponitur *AB* ad *BC* esse in majori ratione, quam (f) *Per axio.*
FI ad *IL*: Ergo (f) alia *OB* (quæ necessario erit minor ante 1. l. 5.
 (g) quam *AB*) est ad *BC*, ut *FI* ad *IL*. Ergo (h) com- (g) *Patet ex*
 ponendo *OC* est ad *BC*, ut *FL* ad *IL*. Ergo *AC* est ad 10. l. 5.
BC in (i) majori, quem *FL* ad *IL*. (h) *Per 18.*

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionibus l. 5.
 minori, (i) *Per 8. l.*
 5. & *schol.*

PROPOSITIO XXIX.

SI *AC* ad *BC* majorem rationem habet, quam *Fig. 18.*
FL ad *IL*; etiam dividendo *AB* ad *BC* ma-
 jorem habet rationem, quam *FI* ad *IL*.

Quia ponitur *AC* ad *BC* majorem habere rationem, (k) *Per axio.*
 quam *FL* ad *IL*; Ergo (k) alia *OC* (quæ necessario minor ante 1. l. 5.
 erit (l) quam *AC*) erit ad *BC*, ut *FL* ad *IL*. Jam igi- (l) *Per 10. l. 5.*
 tur erit dividendo (m) *OB* ad *BC*, ut *FI* ad *IL*. Ergo *AB* (m) *Per 17.*
 est ad *BC* in (n) majori, quam *FI* ad *IL*. (n) *Per 8. l.*
 5. & *schol.*

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18.

S I AC ad BC maiorem rationem habet, quam FL, ad IL; convertendo habebit AC ad AB minorem, quam FL ad FI.

- Quoniam AC est ad BC in maiori, quam FL ad IL;
 (a) Per 29. erit dividendo (a) AB ad BC in maiori, quam FI ad IL.
 l. 5. Ergo invertendo (b) CB ad BA, est in minori, quam LI
 (b) Per 26. ad IF. Ergo componendo (c) CA est ad BA in minori,
 l. 5. quam LF ad IF.
 (c) Patet ex 28. l. 5. [Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori: hoc est, si AC ad AB minorem rationem habeat quam FL ad FI; habebit convertendo, AC ad BC maiorem rationem quam FL ad IL.]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19.

S I AB ad C maiorem rationem habet, quam F ad I; & C ad LQ maiorem rationem habeat, quam I ad S, & sic deinceps; etiam [ex æquo] prima AB ad ultimam LQ maiorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.

- Quoniam AB est ad C in maiori, quam F ad I; Ergo
 (d) Per axio. alia (d) quæpiam OB (quæ necessario minor (e) erit quam ante 1. l. 5. AB) est ad C, ut F ad I. Et quia C est ad LQ in maiori
 (e) Per 10. quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit l. 5. necessario maior quam LQ) est ut I ad S. Igitur ex æquo
 (f) Per 22. (f) OB est ad LR ut F ad S. Ergo OB est ad LQ in ma- l. 5. jori quam (g) F ad S. Ergo AB est ad LQ (h) in multo
 (g) Per 8. l. 5. majori, quam F ad S.
 (h) Per eand. [Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori.]

Corfol. Ex hujus prop. demonstratione liquet, quod si AB ad C maiorem rationem habeat quam F ad I; & C ad LR eandem habeat rationem quam I ad S; etiam prima AB ad ultimam LR maiorem rationem habebit quam prima F ad ultimam S. Idemque similiter verum est de proportionem minori.]

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

SI AB ad C maiorem rationem habet, quam I ad S ; & C ad LQ maiorem quam F ad I ; etiam ex æquo [perturbate] habebit maiorem rationem AB ad LQ , quam F ad S . Fig. 19.

Demonstratio eadem quæ præcedentis, sed pro 22. citetur 23.

[Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori. Et ab hac propositione, corollario illi quod a prop. præcedente deducitur, simile corollarium deducetur.]

PROPOSITIO XXXIII.

SI tota (AB) ad totam (FI) maiorem rationem habuerit, quam ablata (CB) ad ablatam (LI), tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (AC) ad reliquam (FL). Fig. 12.

Quia AB est ad FI in maiori, quam CB ad LI ; erit (a) $l. 5.$ permutando etiam AB ad CB in maiori, quam FI ad LI . (b) $Per 30.$ Ergo convertendo (b) AB est AC in minori, quam FI ad FL . (c) $Patet ex 27. l. 5.$ Ergo etiam permutando (c) AB est ad FI , in minori, quam AC ad FL .

[Scholium. Eodem modo, si tota ad totam minorem rationem habuerit quam ablata ad ablatam; tota ad totam maiorem rationem habebit quam reliqua ad reliquam.]

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C , & E ad O) sunt equalium rationum (A ad B & E ad F) duplicate aut triplicate & sic deinceps; æquales sunt etiam ipse. Fig. 20.

Quia ratio A ad C duplicata est rationis A ad B ; erit (d) ut A ad B , sic B ad C . Ob eandem causam erit ut E ad F , sic F ad O . Cum ergo sit ut A ad B , sic per hyp. E ad F ; & ut B ad C , sic F ad O , (nam ut B ad C , sic A ad B , hoc est E ad F , hoc est F ad O ,) igitur (e) ex æquo erit, ut A ad C , sic E ad O .

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 10.

Rationes aequales A ad C & E ad O , sint duplicatae, aut triplicatae, & sic deinceps, rationum A ad B , & E ad F ; etiam haec aequales erunt.

Si negas, sit ut A ad B , sic E ad aliam Z inaequalem ipsi F , & fiat ut E ad Z , sic Z ad X . Quoniam igitur rationum aequalium A ad B , & E ad Z duplicatae (a) sunt rationes A ad C , & E ad X ; etiam ratio E ad X aequalis erit (b) rationi A ad C , hoc est per hyp. rationi E ad O . Ergo (c) aequantur O & X . Ergo patet etiam medias F & Z aequales esse. Ergo A est ad B , ut E ad F seu Z . Quod erat demonstrandum.

(a) Per def.
10. l. 5.
(b) Per prac.
(c) Per 9.
l. 5.

Ex contradictorio assertionis, directe illata est assertio.

P A R S S E C U N D A.

Euclidea per multiplices definitio aequalium rationum, demonstratur: exhibeturque ac demonstratur aliud magis immediatum, & facilius indicium aequalitatis rationum.

Proportionum elementis, methodo (nisi fallor) commodiori explicatis, reliquum est, ut quod secundo loco supra promiseram, praestare aggrediar. Hoc igitur loco (quod a nullo haecenus factum est) demonstrabimus, nihil assumendo, nisi quod per se lumine naturali sit manifestum, duas rationes inter se aequales esse, quando antecedentium quaelibet aequae multiplices, consequentium aequae multiplicibus, semper sunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter aequales. Cujus quidem negotii cum satis ardua, atque prolixa sit demonstratio, ut jam reipsa cognoscemus, facile apparebit praepostere egisse Euclidem, qui aequalitatis rationum primum, & fundamentale indicium sumi voluit ex hac multiplicium indemonstrata haecenus proprietate, cujus tam remota & obscura sit cum rationum aequalitate connexio.

Lemma 1.

Lemma 1.

SI A ad B , ut C ad F ; & sint antecedentium A , C , Fig. 21.
quælibet æque multiples I , Q , nimirum vel duplæ, vel triplæ & sic deinceps. Sint item consequentium B , F quælibet æque multiples L , R .

Erit quoque ut I ad L , sic Q ad R . [*Est prop. 4. hujus libri, qua in parte prima omittitur.*]

Quoniam enim A est ad B , ut C ad F ; etiam I dupla ipsius A erit ad B , ut Q dupla ipsius C est ad F : & I tripla A erit ad B , ut Q tripla C , ad F , & sic in infinitum. Quod quidem æque est per se clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I est ad B , ut Q ad F ; erit quoque I ad L duplam ipsius B , ut Q ad R duplam ipsius F ; & ut I ad L triplam ipsius B , ita Q ad R triplam F : Et sic in infinitum, quod rursus tam clarum est, quam axioma quodcunque. Liqueat ergo propositum.

[*Aliter, ex prop. 16. 15. & 11. l. 5.*]

Cum sit $A:B::C:F$; permutando erit $A:C::B:F$. Sed per 15. est $A:C::I:Q$; & $B:F::L:R$. Ergo per 11. est $I:Q::L:R$; & permutando, $I:L::Q:R$.]

Lemma 2.

SI quantitates A , B habeant communem mensuram C , erit Fig. 22.
 A toties sumpta, quoties est C in B , æqualis quantitati B toties sumptæ, quoties C est in A .

Ponatur C contineri in B quater, & in A sexies, ac proinde B esse 4. C , & A esse 6. C . Igitur 6. C (hoc est A) ducta in 4, (hoc est, toties sumpta quoties C est in B) efficiunt 24. C . Similiter 4. C (hoc est B) ducta in 6, (hoc est, toties sumpta quoties C est in A) efficiunt etiam 24. C . Ergo A toties sumpta quoties C in B æquatur B toties sumptæ quoties C in A .

Theorema 1.

SI ratio AB ad FI major sit ratione L ad R ; Fig. 23.
tales sumi possunt antecedentium (AB & L) æque multiples, tales item æque multiples consequentium (FI & R), ut multipla antecedentis (AB) ra-

K 4

tionis

tionis majoris, excedente multiplam consequentis (FI); multiplex antecedentis (L) rationis minoris, non excedat multiplicem sui consequentis (R.)

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & sint AB & L, majores rationum termini. Quoniam igitur AB ad FI majorem habet rationem quam L ad R; alia quædam
 (a) *Per axio.* quantitas Z (a) habebit ad FI eandem rationem, quam L
ante 1. l. 5. ad R. Quia jam igitur ratio Z ad FI æqualis est rationi L ad R, poniturque ratio AB ad FI major ratione L a I R, erit quoque ratio AB ad FI major ratione Z & FI, ac proinde AB major est quam Z: quæ omnia per se sunt manifesta. Igitur ex AB sumi poterit AC par Z; eritque etiam AC ad FI, ut L ad R. Auferatur residuum BC ex AC quoties potest, puta ter; tum seca AC in tot æquales partes, exem. gr. in 6. donec earum una possit auferri sæpius ex FI, quam BC ex AC, puta quater, & residuum esto OI, quod erit minus una particula. Hoc quoque fieri posse per se est manifestum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ a proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas esto Q.

Quoniam igitur Q est mensura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties sumpta, quoties Q est in FO, nempe quater, æquatur FO toties sumptæ, quoties Q est in AC, nempe sexies. Deinde quia residuum OI est minus una particula, hoc est quam Q, erit OI toties accepta, quoties Q est in AC, nempe sexies, adhuc minor quam AC. Ulterius, quia BC minus sæpe auferri potest ex AC, quam Q, ex FI. (positum quippe fuit BC ex AC auferri tantum posse ter, Q vero quater ex FI;) manifestum est BC toties sumptum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quam AC, ac proinde multo majus esse quam OI sumptum sexies, quod ostendi supra esse minus quam AC. Atqui ostensum est AC sumptum quater, & FO sumptum sexies esse æqualia. Quare si AC sumpto quater addatur BC quater, & ad FO sexies sumptum addatur OI sexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc est 4. AB majora, quam 6. FO & 6. OI, hoc est quam 6. FI. Quia vero 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora quam 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur supra L esse ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora sunt quam 6. R. Acceptæ sunt igitur antecedentium AB, & L æque multiplices, nempe quadruplæ, item æque multiplices consequentium FI & R, nempe sextuplæ, & tamen ostensum est multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB,) superare multiplicem consequentis

quantis FI (nempe 6. FI:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L.) non excedere multiplicem consequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonstrandum.

Theorema 2.

SI antecedentium (*A, C*) qualibet æque multipli-^{Fig. 21.} ces, quibuscumque consequentium (*B, F*) æque multiplicibus, sint vel simul majores, vel simul minores, vel simul æquales, ratio (*A* ad *B*) rationi (*C* ad *F*) æqualis erit.

Si negas, sit ratio *A* ad *B* major ratione *C* ad *F*. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium *A, C* sumi tales æque multiplices, item tales consequentium *B, F* æque multiplices, ut multipla antecedentis *A* excedente multiplam consequentis *B*, multipla antecedentis *C* non excedat multiplam consequentis *F*; quod est absurdum, quia evertit hypothesim. Ergo &c.

In hac demonstratione, uti & in sequentibus cæ solum propositiones ex quinto libro adhibentur, quæ per se æque sunt manifestæ, atque ipsa axiomata.

Theorema 3.

SI sumi possint antecedentium (*O, R*) tales æque^{Fig. 24.} multiplices, itemque tales æque multiplices consequentium (*Q, S*), ut multipla antecedentis unius (*O*) superante multiplam consequentis (*Q*), multipla antecedentis alterius (*R*) non excedat multiplam sui consequentis (*S*); erit ratio (*O* ad *Q*) cujus antecedentis multiplex superat multiplicem consequentis, major ratione altera (*R* ad *S*.)

Rationes illas inæquales esse sic ostendo. Si essent æquales; quæcunque antecedentium æque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuscumque æque multiplicibus consequentium, vel simul majores essent, vel simul minores, vel simul æquales; quod est absurdum, quia evertit hypothesim.

Quod

Quod autem ratio O ad Q major sit, cujus antecedentis multiplex superat, sic ostendo. Si negas, fit ratio R ad S major ratione O ad Q . Ergo per theor. 1. tales accipi possunt antecedentium R & O æque multiplices, talesque item æque multiplices consequentium S ad Q , ut multipla antecedentis R rationis majoris excedente multiplam consequentis S , multipla antecedentis O non excedat multiplam consequentis Q : non autem tales (quod facile ex 1. lem. ostenditur,) ut multipla O excedente multiplam Q , multipla R non excedat multiplam S . Quod est absurdum, cum evertat hypothesim.

Theorema 4.

Fig. 25.

CUM proportio irrationalis est, nulla multiplex antecedentis ulli consequentis multiplici æqualis esse potest. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, solummodo multiplicium simultaneus excessus, defectusque spectari debent.

Sit proportio irrationalis A ad B . Si A aliquoties sumpta posset fieri æqualis B aliquoties sumptæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z : singulæ A & B essent eidem Z commensurabiles, ac proinde & commensurabiles inter se, contra hypothesim.

Quia tamen secundum theorema tam ad rationales proportionem pertinet, quam ad irrationales; simultaneo excessui & defectui æqualitatem simultaneam addidimus cum Euclide.

Demonstratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & sexti libri demonstrationes subsistunt: patetque multiplicium illum excessum defectumque simultaneum, infallibile indicium esse æqualitatis rationum, non quidem per se immediate, sed demonstratione, quam modo dedimus, prius rite intellecta.

Verum quia indicium per multiplices, quantumvis jam securum, nihilominus remotum est & implexum, hic aliud clarissimum & proximum, quod promisi supra, demonstrabo.

Theorema

Theorema 5.

SI consequentes (CF , NQ ,) & consequentium Fig. 26.
qualibet aliquota similes, (puta & decima, &
centesima, & millesima, & ita deinceps sine termino)
in antecedentibus (AB , GM) aequali semper nume-
ro contineantur; rationes (AB ad CF , & GM ad
 NQ) aequales erunt.

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cum, si aufe-
rantur quoties possunt, æqualis est utrimque numerus ab-
latarum.

Demonst. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF ,
major ratione GM ad NQ . Quoniam igitur AB ponitur
ad CF majorem habere rationem quam GM ad NQ , ma-
nifestum est aliquam (puta AD) minorem quam AB , æqua-
lem habere rationem ad CF , quam GM ad NQ . Manife-
stum similiter est, aliquam ipsius CF aliquotam (ex. gr.
unam trigesimam) esse minorem differentia DB . Sit CE
una trigesima ipsius CF , & auferatur ex AB quoties potest
exemp. gr. millies, totumque ablatum sit AO . Quoniam
igitur AO est 1000. CE , & CF est 30. CE , erit AO ad CF
ut 1000. ad 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP , similis alteri CE ,
nempe etiam una trigesima. Quoniam ex hyp. CE , NP
æquali numero in AB , GM continentur, & CE ablata ex
 AB quoties potuit, ablata fuit millies, etiam NP ex GM au-
ferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum GK est
1000. NP , & NQ est 30. NP , erit GK ad NQ ut 1000.
ad 30. hoc est, ut AO ad CF . Quia vero CE ablata ex AB
quoties potuit, reliquit OB , erit OB , minus quam CE .
Sed CE , nempe una trigesima CF , est minor posita quam
 DB . Ergo OB est multo minor quam DB . Ergo AO est
major quam AD . Ergo AO ad CF , majorem rationem
habet quam AD ad CF . Sed ponebatur esse AD ad CF ,
ut GM ad NQ . Ergo AO ad CF majorem rationem ha-
bet, quam GM ad NQ : hoc est, multo majorem quam
 GK ad NQ . Quod est absurdum, quia ostendi supra AO
esse ad CF ut GK ad NQ . Non possunt igitur rationes
datæ AB ad CF & GM ad NQ esse inæquales. Æquales
igitur sunt. Quod erat demonstrandum.

Theorema

Theorema 6.

Fig. 16.

SI aut consequentes (CF , NQ ,) aut consequentium aliqua similes aliquota (ex. gr. decima,) inaequali numero in antecedentibus (AB , GM) contineantur; rationes (AB ad CF , & GM ad NQ) inaequales erunt, & erit illa major, cujus consequentis aliquota sapius continetur.

Contineatur CE decima una ipsius CF , in AB millies, & sit AO , 1000. CE ; tum vero residuum OB erit minus quam una CE . Deinde NP una decima NQ , contineatur in GM , tantum nongenties nonagies septies, & sit GK , 997. NP ; patet residuum KM fore minus una NP , ac proinde 1000. NP fore majores quam GM . Sit ergo GR , 1000. NP . Quoniam igitur AO est 1000. CE , & GR , 1000. NP ; CF vero, 10. CE , & NQ , 10. NP ; erit AO ad CF , ut GR ad NQ . Ergo AB est ad CF in majori ratione, quam GR ad NQ ; ac proinde in multo majori, quam GM ad NQ . Quod erat demonstrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales inæqualesque certo liceat discernere. Et possemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non sint, l. 5. propositiones, quas per multiplices Euclides demonstrat, multo expeditius demonstrare, nisi magis ex usu discipulorum putarem, illas ea methodo, qua in prima parte usi jam sumus, proponere.

TERTIA

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione.

I.

Proportionis Divisio.

Prima divisio est in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. Rationalis dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus consequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus consequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque species, quæ sunt; multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens.

Ratio multiplex est, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio superparticularis est, quando major minorem continet semel, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3. ad 2 vel 6. ad 4. quæ dicitur sesquialtera, quia major minorem continet semel & ejus dimidium: ratio 4. ad 3. five 16. ad 12. quæ dicitur sesquitertia, quia major minorem continet semel, & tertiam ejus partem, & sic deinceps.

Ratio superpartiens est, cum major minorem continet semel & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis est ratio 8. ad 5. vel 14. ad 10. quia 8. continet 5. semel, & insuper 3. hoc est tres quintas ejusdem numeri 5. quæ tamen simul sumptæ non conficiunt unam aliquotam ipsius 5. Similiter 14. continet 10 semel, & bis 2. hoc est, duas quintas numeri 10. quæ tamen simul sumptæ (nempe 4.) non conficiunt unam aliquotam ipsius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, quia alias esset ratio superparticularis.

Ratio multiplex superparticularis est, cum major minorem aliquoties continet, & insuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. ad 2. 10. ad 4. &c.

Ratio

Ratio multiplex superpartiens est, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8. ad 3. 16. ad 6. &c.

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

Denominator proportionis rationalis est, qui distincte & clare exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; sive qui ita se habet ad unitatem, ut major ad minorem; ac proinde ostendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27. ad 9. denominator est 3. quia 3. ita est ad unitatem, ut 27. ad 9. ac proinde ostendit quoties consequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cujuscunque rationis denominator invenitur, si major terminus dividatur per minorem, nam quotiens divisionis erit denominator. Ratio est, quia quotiens ita est ad unitatem, ut dividendus ad divisorem, hoc est ut major ad minorem.

Exempl. Detur ratio 60. ad 6. Divide 60. per 6, quotiens 10. est denominator. Detur rursus ratio 60. ad 16. diviso 60. per 16, fit quotiens $3\frac{3}{4}$. hic est denominator.

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUM rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune consequens habentes; communis consequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune consequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, si sola sit, exhiberi potest denominator. At si duæ fuerint, vel plures proportionum irrationales, alio quodam sensu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum ostendant, quomodo una ratio ad alteram se habeat. Id quod egregie observavit P. Gregorius a S. Vincentio, operis sui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclarissimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit; tum inprimis libro 8. ejusdem operis de proportionalitatibus ita scripsit, ut novam de proportionalitatibus scientiam condidisse censei merito debeat. Datae sint

sint rationes irrationales A ad B, & C ad D, quæ revocentur ad rationes FH, GH, habentes commune consequens H, sic ut ratio F ad H fit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune consequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc est rationum A ad B, & C ad D,) quia ostendunt quomodo una ratio sese habeat ad alteram. Sicut enim F est ad G, ita ratio FH est ad rationem GH, hoc est ratio AB ad rationem CD.

IV.

Axiomata.

AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes consequens (H,) eam inter se proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) Est prop. 2. P. Gregorii a S. Vinc. l. 8. quadr. Fig. 28.

Hoc est, ratio G ad H, tanto major est ratione F ad H, quanto G major est quam F.

Ax. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter se habent consequentium proportionem. Est propof. 7. P. Gregorii a S. Vinc. lib. 8. quadr. Fig. 29.

Hoc est, ratio I ad L est ad rationem I ad M, ut reciproce est M consequens, ad consequens L: five ratio I ad L tanto major est ratione ejusdem I ad M, quanto L fuerit minor quam M, ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter se rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12. ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. (a) denom. ratio 12. ad 3. est eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. est eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$. ad 1. Sed ratio 4. ad 1. est ad rationem $2\frac{1}{2}$. ad 1. ut (b) 4. est ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. est ad rationem 15. ad 6. ut denominator 4. est ad denominatorem $2\frac{1}{2}$. (a) Num. 2. (b) Per axio. hic.

V. Ra-

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

Additio perficitur, si rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum summa ad unitatem, est rationum datarum summa quaesita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & $2\frac{1}{2}$ additi sibi mutuo, faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$. ad 1. est par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a maiore; nam ratio residui ad unitatem, est ratio quæ remanet post minorem rationem a maiori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatorum sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$. a maiori 4. remanet $\frac{1}{2}$. Ratio $\frac{1}{2}$ ad 1. est ea quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. seu $2\frac{1}{2}$. ad 1. detraxeris ex ratione 12. ad 3. seu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 30.

Rationes datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune consequens (H.) Antecedentia F & G sibi addita sunt FG. Ratio FG ad H est summa rationum F ad H, & G ad H, hoc est rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, si rationes datæ ad commune consequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a maiori F: ratio enim residui ad H, est ea quæ remanet postquam rationem G ad H, seu C ad D subtraxeris a ratione F ad H, seu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio & Divisio.

Denominatores rationum per invicem multiplicati, dabunt denominatorem rationis quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc

Hoc est, ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, est ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex Ax. 1. & 3. Nam multiplicatio rationum est unius ad alteram additio sæpius repetita. Hanc autem perfici repetita sæpius antecedentium additione, (hoc est multiplicatione,) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 20. ad 4. denominatores 3. & 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. est ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (seu 3. ad 1.) & 20. ad 4. (seu 5. 1.) producitur.

Divisio rationum perficitur, si denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, est ea quæ habetur ex divisione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3. axioma; cum rationis per rationem divisio, sit subtractio unius ab altera sæpius repetita.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ sint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 31a

Hæc operatio est Gregorii a S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipse, nec alius quisquam demonstrat.

Hunc igitur in modum demonstrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonstratione numeri 12. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per const. sunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E est ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonstrandum.

IX.

Divisio rationum irrationalium.

Data sit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, sic C ad D. Ratio D ad E est quotiens. Fig. 31b

L

Nam

Nam ratio C ad D (hoc est per const. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonstratione num. 12. ab his independente. Ergo ratio D ad E est quotiens, cum multiplicata in divisorem, qui est ratio A ad B, restituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De Compositione rationum: Ejus Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc est denominatores) inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Est definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quocunque quarum denominatores sint 2. 3. $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2. per 3. denom. fit 6. denominator rationis compositæ ex rationibus, quarum denominatores sunt multiplicati. Hoc est ratio 6. ad 1. est composita ex rationibus 6. ad 3. & 12. ad 4. Quod si denominatorem 6. multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$. fit $7\frac{1}{2}$. denominator rationis compositæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores sunt 2. 3. $1\frac{1}{4}$.

XI.

Compositio rationum non aliud est quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iisdem rationibus componitur ex quarum multiplicatione producitur.

NAM ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea est, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, seu consequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea est, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem seu consequens commune. Ergo ratio ex iisdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

Scholium.

UT numeri sequentis demonstratio clarius percipiatur, observandum est, multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut est unitas ad alterutrum, ita reliquus sit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per magnitudinem dicitur multiplicari, cum ut quæpiam recta pro unitate assumpta se habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus est ad alterum, ita unitas sit ad alium, qui quotiens nominatur; ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi; quando assumpta quantitate aliqua pro unitate, ut una se habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, seu magnitudines, seu numeri; ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonstratum est a Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonstraret, nemo hactenus inventus est. Unde Gregorius a S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium secundum, censet inter principia numerandum esse, donec alicui demonstratio occurrerit, qua inter theoremata referri possit.

Universalem igitur hujus rei demonstrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonstratur in magnitudinibus.

DAtæ sint magnitudines quæcunque & quotcunque A, Fig. 32: B, C, D. Ostendendum est rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune consequens B, ac proinde rationum denomi-

(a) *Per n. 3.* natores sunt A, X: & consequens commune B (a) munus explet unitatis, quæ est commune consequens respectu omnium denominatorum numericorum.

(b) *Per sch. praced.* Itaque si velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit (b) facere ut B unitas est ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, seu X per A, plane ac si cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui est productum multiplicationis.

(c) *Per defin. num. 10.* Quoniam igitur quantitas Z est productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio (c) hujus producti Z ad B unitatem, seu commune consequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorsus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7. ostendimus evenire, in qua si denominatores inter se multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea est quæ fit ex rationum multiplicatione.

Atqui per constr. ratio X ad B est ratio B ad C. Ergo etiam ad ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia vero per constr. ut B est ad X, ita A est ad Z, etiam inversim Z ad A, ut X ad B, hoc est, per constr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z est ad B, ita A est ad C. Sed jam ostensum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. ostensum est rationes componi ex iisdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonstrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et sic deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

Demon.

Demonstratur in numeris.

8 2 $\frac{8}{3}$ **E** Andem prorsus demonstrationem valere
 4 1 $\frac{4}{3}$ in numeris jam ostendam, unde etiam
 3 $\frac{3}{4}$ **I** veritas illius, ac soliditas magis stabilietur.
 Dati sint tres numeri quicumque exem.
 gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita 1. ad 2.
 & ut 4. ad 3. sic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 &
 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter se æqua-
 les; eritque ex æquo (a) etiam ratio 8 ad 3 æqualis ratio- (a) Per 22.
 ni 2 ad $\frac{3}{4}$. l. 5.

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$. eruntque rationes 2
 ad 1. & 1 ad $\frac{4}{3}$ (hoc est, rationes 8 ad 4 & 4 ad 3.) re-
 ductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commu-
 ne consequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt (b) ra- (b) Patet ex
 tionum 8 ad 4. & 4 ad 3 denominatores. Multiplicentur num. 2.
 jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$. hoc est, fiat, ut 1 ad
 $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denomina-
 toribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter se multiplicatis.
 Ergo ratio hujus producti $\frac{8}{3}$. ad 1. est ea, (c) quæ produci- (c) Patet ex
 citur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Jam num. 7.
 vero quia per const. ut 1. est ad $\frac{4}{3}$. ita 2. est ad $\frac{8}{3}$. erit
 etiam inversim $\frac{8}{3}$. ad 2. ut $\frac{4}{3}$. ad 1. Sed rursus per const.
 $\frac{4}{3}$. sunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$. sunt ad 2. ut 1. ad
 $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$. sunt ad 1. ut 2. ad $\frac{3}{4}$. Sed jam
 ostendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. esse eam quæ producitur ex mul-
 tiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio
 2. ad $\frac{3}{4}$. est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum
 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed ostensum est supra rationem 2.
 ad $\frac{3}{4}$. parem esse rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8. ad
 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad
 3. Igitur per num. XI. ratio 8. ad 3. ex rationibus 8. ad
 4. & 4. ad 3. composita est. Quod erat demonstrandum.

8 Eodem modo demonstrabitur si plures dentur nu-
 4 meri quam tres, rationem 8 ad 25 componi ex ratio-
 3 nibus 8 ad tria, (hoc jam est, ex rationibus 8 ad 4.
 25 & 4 ad 3) & ex ratione 3 ad 25; & rationem
 73 8 ad 73 componi ex rationibus 8 ad 25 (hoc jam est
 ex rationibus 8 ad 4; 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25
 ad 73, & sic in infinitum.

XIII.

Si dentur quotcunque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus composita;

Fig. 33.

SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H; & ut C ad D, ita H ad I; & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit composita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonstravimus, hoc est per constr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non est æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 33.

eſſe

INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, five illæ sint continue proportionales five non; ratio primæ G ad ultimam K non est æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis sit composita. Nam ex iis componi idem est, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut ostensum est num. XI. Cum igitur ratio G ad K sit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter se multiplicatis, ut ex demonstratione num. 12. patet, non possunt rationes G ad H, H ad I, I ad K simul sumptæ æquales ~~est~~ rationi G ad K, nisi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ non mutuo addendæ, ut traditur num. 5. & 6. ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ fere semper, ut dixi, erit diversa ab illa, quæ ex earundem rationum compositione, hoc est, multiplicatione exsurget.

3
d
r
o-

r.

-

e

c-

a.

l-

ur

I

2.

ul

ns

o-

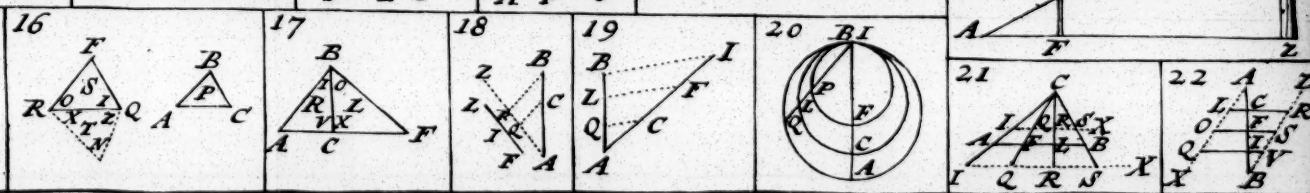
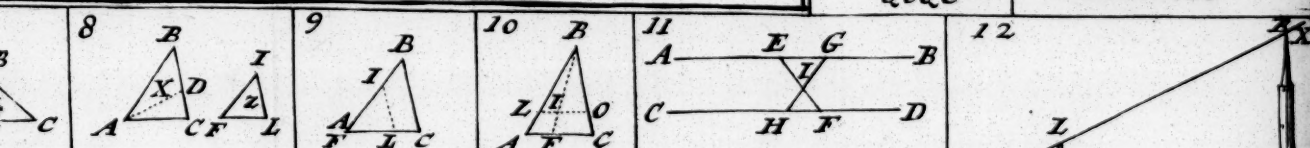
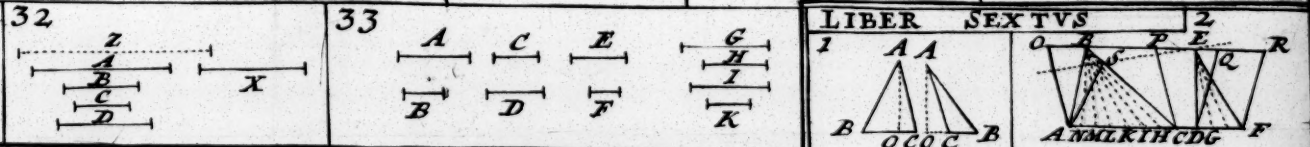
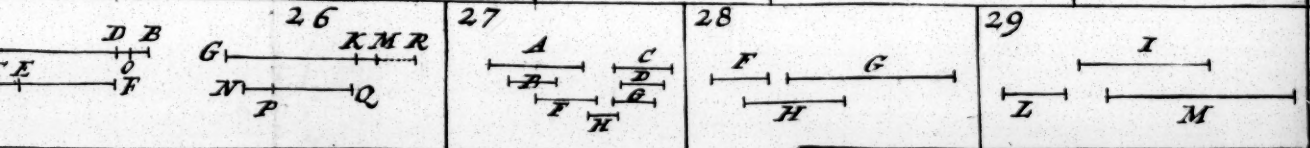
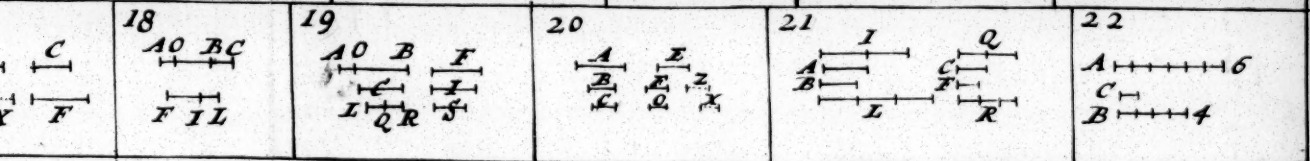
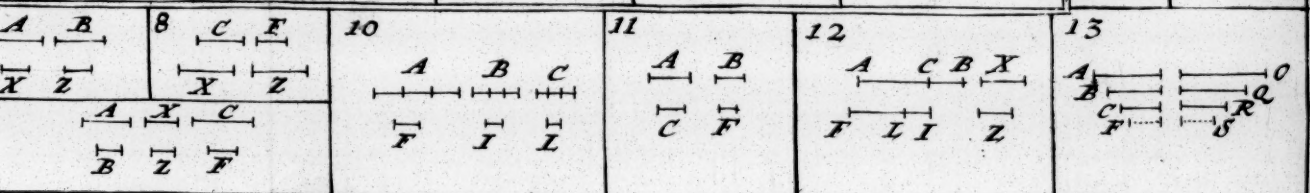
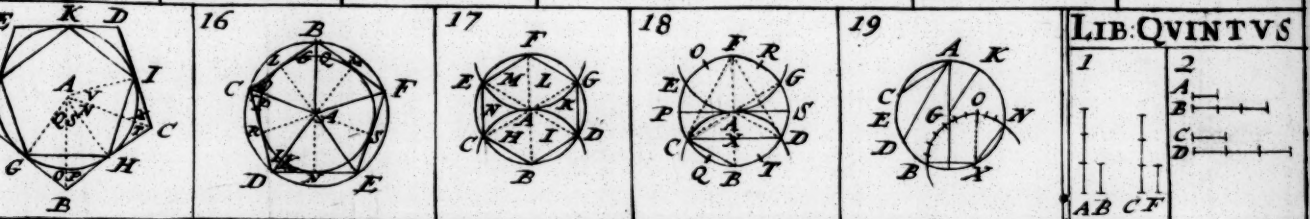
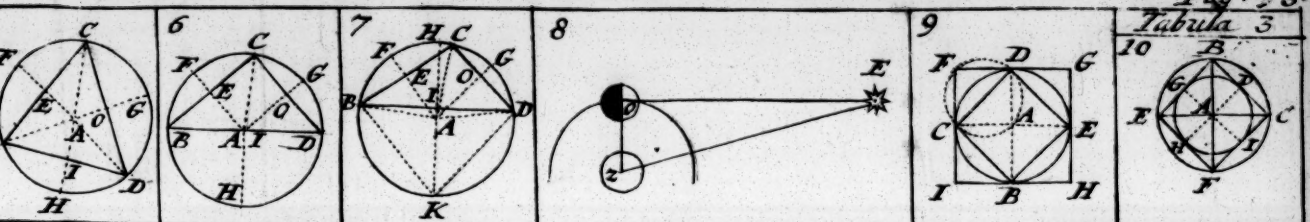
nt

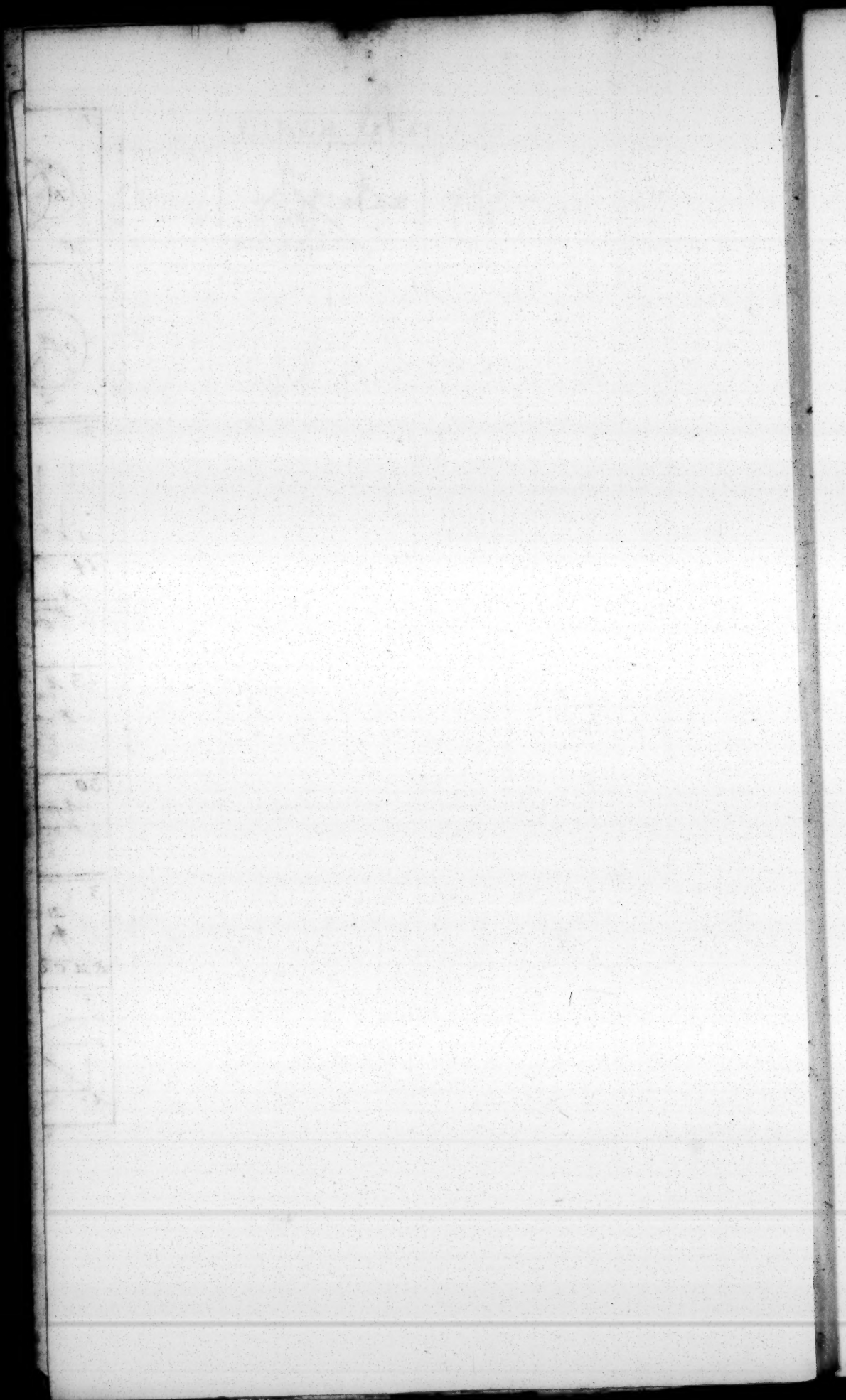
na

re

o-

J-





ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER SEXTUS.

Proportionum doctrina libro quinto universim exposita, in sexto figuris planis applicatur. Et sunt quæ hoc libro traduntur adeo scitu necessaria, ut sine illis arcana Geometriæ penetrare, fructusque suaves Matheseos percipere nemo possit. Ad propositiones prope singulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas est.

Incipit autem Liber hic Sextus egregiam illam de proportionem Geometrica doctrinam nuperrime expositam, usibus variis, planeque præstantissimis applicare: & a triangulis, figurarum simplicissimis exorsus, eorum latera & areas, prout ad se invicem proportionem quadam respondent, investigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit; & quo easdem modo in ratione data augeamus aut minuamus, ostendit. Regulam etiam Auream sive proportionalem, totius arithmetice palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantum quadratum sed pentagonum, hexagonum, & universim polygonum quodcunque ab hypotenuâ descriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuscunque polygonis similibus a duobus lateribus descriptis, demonstrat. Postremo facillima certissimaque tum lineas tum superficies tum corpora mensurandi principia, in omnibus Mathematicarum scientiarum partibus utilissima proponit.

DEFINITIONES.

1. **S**imiles figuræ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos existunt, vel quæ sunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Fig. 8. l. 6. Ut triangula X, Z dicentur similia, si angulus A sit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L, atque insuper si AB sit ad FI, ut BC ad LI; & BC ad LI, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI; [vel
 (a) Per 16. si, (a) permutando, AB sit ad BC, ut FI ad IL; & BC ad
 l. 5. CA, ut IL ad LF; & CA ad AB, ut LF ad FI;] Comparando semper latera æqualibus angulis opposita [vel qua inter æquales angulos, vel qua circa æquales angulos existunt.] Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium similitudo explicabitur.

Fig. 39. 2. Reciprocae figuræ sunt, cum in utraque antecedentes & consequentes rationum termini [reciproce] fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
 si AC sit ad CB,
 ut FC ad CL.

Antecedentia sunt AC & FC, quorum in utraque figura unum est; [hoc est, AC in X, FC in Z:] & consequentia sunt CB & CL, quorum similiter in quaque figura unum est, [sed in verso ordine; nempe CB in Z, CL in X:] parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

[Porro, quatuor quantitates, A, B; C, D, sunt reciproce proportionales, si fuerit prima ad tertiam ut quarta est ad secundam; vel si prima fuerit ad quartam ut tertia est ad secundam: nempe, si $A:C::D:B$, vel si $A:D::C:B$, erunt A, B, C, D reciproce proportionales.]

Fig. 1.

3. Altitudo figuræ est perpendicularis AQ, a vertice ad basim deducta. Est Euclidi 4.

Ut trianguli ABC altitudo est perpendicularis AQ, a vertice cadens in basim BC, vel intra triangulum, vel extra in basim protractam. Basim autem & vertex assumuntur ad libitum.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas suas circumferentias rationem.

Ut si ambo sint suæ circumferentiæ pars tertia vel quarta, &c.

[Et segmenta circulorum similia sunt, qua arcus similes habent. Idem intellige de sectoribus similibus.]

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum harum exponentes in se invicem multiplicati, illius exponentem producant. (Rationis autem exponens invenitur dividendo antecedentem per consequentem.)

Sic ex rationibus A ad B , & R ad S componitur ratio $A \times R$ ad $B \times S$. Nam $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = \frac{A \times R}{B \times S}$. Vel si fiat, ut R ad S , ita B ad C ; ex rationibus A ad B , R ad S componitur ratio A ad C . Tunc enim $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = (a) \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{B \times C} (a) \text{ Per } 36. = (b) \frac{A}{C}$. (b) Per 15.

Sic duplum tripli est sextuplum: sic etiam ratio 4 ad 3 componitur ex rationibus 4 ad numerum quemvis, (v. gr. 7.) & ipsius numeri (7) ad 3. Nam $\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$.

Eodem modo liquet, rationem quamvis ex plurimis rationibus componi posse. Sic ratio A ad E componi potest ex rationibus A ad B , B ad C , C ad D , & D ad E .]

PROPOSITIO PRIMA.

Triangula (ABC , DEF) & parallelogramma Fig. 2. ($AOPC$, $DQRF$) quæ eandem habent altitudinem, siue inter easdem existunt parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases (AC , DF .)

Ab hoc theoremate dependet totus sextus liber, imo quidvis uspiam de figuris siue planis, siue solidis per proportionem demonstratum est. Demonstrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo statim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonstrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis secundæ lib. 5. [vel ex altero illo proportionum æqualium indicio primo & infallibili, quod definitionibus lib. 5. interposuit Tacquetus, ante def. 7.] hunc in modum.

Sumatur baseos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE , erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF , ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE sunt consequentium (c) similes aliquotæ. Auferatur deinde DG ex basi AC quoties potest, puta sexies, [& relinquetur AN ipsa DG minor;] ducanturque rectæ HB , IB , KB , LB , MB , NB . Quoniam CH , HI , &c. æquales sunt singulæ ipsi DG , etiam sex triangula CBH , HBI , &c. triangulo DEG æqualia (d) erunt (d) Per 38. singula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC , l. 1. toties

toties triangulum DEG continetur in antecedente ABC . Eodem discursu ostendam quascunque consequentium (baseos DF & trianguli DEF) similes aliquotas in antecedentibus, (basi AC & triangulo ABC), æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis secundæ lib. 5. [*hoc est, per alterum illud proportionum aequalium indicium,*] ut basis AC ad basim DF , ita triangulum ABC ad triangulum DEF . Quod erat demonstrandum.

- (a) Per 41. Quoniam vero parallelogramma AP , DR sunt dupla (a)
l. 1. triangulorum ABC , DEF , etiam illa erunt inter se ut bases.

Corollaria.

Fig. 3. 1. Triangula (ABC , FIL) & parallelogramma, æquales bases (AC , FL) vel eandem habentia, eam inter se rationem habent quam altitudines (BO , IQ .)

Fiant enim QS , OR æquales æqualibus basibus FL , AC . Erunt igitur etiam QS , OR inter se æquales. Duc SI , RB . Si in triangulis OBR , QIS accipiantur BO , IQ tanquam bases, erunt OR , QS eorum altitudines: quæ cum sint æ-

(b) Per 1. l. 6. quales, erunt OBR , QIS inter se, ut (b) bases BO , IQ . Sed quia ex constr. OR par est AC , & QS par FL , triangula

(c) Per 13. OBR , QIS æquantur (c) triangulis ABC , FIL . Ergo l. 1. etiam triangula ABC , FIL sunt inter se ut BO ad QI .

Fig. 2. 2. Triangula (ABC , DEF) & parallelogramma (AP , DR) quæ sunt ut bases (AC , DF) eandem habebunt altitudinem, siue inter easdem parallelas statui possunt. Est conversæ propositionis prima.

Si enim inter easdem parallelas non constituentur triangula ABC , DEF , BE non erit ipsi AF parallela. Per punctum igitur E ducatur SE ipsi AF parallela, quæ secet CB in S , & jungatur AS . Triangula itaque ASC , DEF , quæ sunt inter

(d) Per hanc easdem parallelas, inter se (d) erunt ut bases AC , DF . Sed prop. per hypoth. triangula ABC , DEF sunt etiam ut AC , DF : ergo

(e) Per 11. (c) triangulum ASC æquatur triangulo ABC , pars toti; quod & 9. l. 5. est absurdum. Non igitur per punctum E , ad rectam AF parallela, a recta BF diversa duci potest, ac proinde triangula ABC , DEF , quæ sunt ut bases, inter easdem parallelas constituentur.

Et cum parallelogramma AP , DR , quæ triangulorum ABC ,

(f) Per 41. DEF (f) dupla sunt, supra easdem cum triangulis bases, & l. 1. inter easdem parallelas constituentur; liquet parallelogramma

(g) Per 15. quæ (g) sunt ut bases, inter easdem parallelas existere. l. 5.

3. Triangula

3. Triangula (ABC , FIL), & parallelogramma, qua inter Fig. 3. se sunt ut altitudines (BO , IQ), bases (AC , FL) habent æquales. Est convers. coroll. 1.

Constructis enim triangulis OBR , QIS , ut in corollario primo, demonstrabitur ut supra, $tri. ABC = tri. OBR$, & $tri. FIL = tri. QIS$. Sed per hypoth. est $ABC : FIL :: BO : IQ$; ergo $OBR : QIS :: BO : IQ$. Si itaque accipiantur BO , IQ pro triangulorum OBR , QIS basibus, erunt OR , QS eorum altitudines; & cum ista sint ut bases, altitudines OR , QS (a) erunt æquales. Sed per constr. $OR = AC$, & $QS = FL$, (a) Per cor. 2. hujus. Ergo AC , FL erunt æquales.]

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit Fig. 4. (FL) parallela, hæc secabit proportionaliter latera, hoc est, AF erit ad FB , ut AL ad CL .

Et si recta (FL) secuerit latera (BA , CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars 1. Ducantur BL , CF . Quoniam FL ponitur parallela BC , erunt triangula FBL , LCF , eandem basim FL habentia, inter (b) se æqualia. Ergo triangulum X , ad utrumque eandem (c) habet rationem, hoc est, triangulum X est ad triang. FBL , ut triangul. idem X est ad triang. LCF . Sed triangulum X est ad triang. FBL , ut (d) AF ad FB ; & (d) Per præc. triangulum X est ad triang. LCF , ut (e) AL ad LC . (e) Per eand. Ergo (f) etiam AF est ad FB ut AL ad LC . Quod erat demonstrandum. (f) Per 11. l. 5.

Pars 2. Ut AF est ad FB , ita triangulum X (g) est ad triangulum FBL ; & ut AL est ad LC , ita triangulum X est ad triang. LCF . Sed jam ponitur AF ad FB , ut AL est ad LC . Ergo triang. X est (h) ad triang. FBL , ut idem X ad LCF . Ergo (i) triangula FBL , LCF , eandem habentia basim, æquantur. Ergo FL , BC (k) sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum. (g) Per præc. (h) Per 11. l. 5. (i) Per 9. l. 5. (k) Per 39. l. 1.

Corollaria.

1. **S**I ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures parallelæ (IO , FL), erunt omnia laterum segmenta, proportionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC . Rectæ FS , SQ æquantur (l) Per 34. (l) LO , OC . Sed BI est ad IF , ut (m) QS ad SF . Ergo etiam BI est ad IF , ut CO ad OL . (m) Per 2. l. 1.

[Cor. 2. l. 6.

Fig. 6.

[Cor. 2. Si duo circuli se intus tangant, & a tactus puncto ducatur AB majoris circuli diameter secans circumulum minorem in C, & AD quavis alia recta, secans minorem in E; (a) Per cor. post 12. l. 3. erit AC diameter minoris: Et erunt diametri subtensis proportionales, & sic erit etiam differentia diametrorum ad differentiam subtensarum; hoc est, AB:AD::AC:AE::BC:DE; vel permutando, AC:CB::AE:ED, & AB:BC::AD:DE. Ductis enim rectis BD, CE, propter angulos ADB, AEC (b) rectos, & proinde aequales, BD, CE parallela (c) erunt. Ergo per hanc prop. AC:CB::AE:ED, quod erat unum; & componendo, (d) AB:BC::AD:DE, quod erat alterum; & convertendo, (e) BA:AC::DA:AE, quod erat tertium.]

A. Vid. Enaf.

PROPOSITIO III.

Fig. 7.

SI recta (BF) angulum trianguli bifariam secans, etiam secet basim (AC) habebunt basis segmenta (AF, FC) eandem proportionem quam reliqua latera (AB, CB.)

Et si baseos partes (AF, FC) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (AB, CB;) recta (BF) basim secans, angulum oppositum (ABC) bisecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL sit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z, latera LB, AB æquantur, anguli (f) quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC duobus (g) internis L, O æqualis est; angulus I, qui per hyp. ipsius ABC dimidius est, æquabitur angulo L. Ergo AL, FB sunt (h) parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF est ad FC, (i) ut LB (hoc est AB) ad BC. Quod erat demonstrandum.

Pars 2. Produc iterum CB donec LB sit par AB. Quoniam ponitur ut AF est ad FC, ita AB (hoc est LB) esse ad BC; erunt AL, FB (k) parallelæ. Ergo externus I, est par (l) interno L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, AB æquales sunt, anguli (m) L & O sunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales sunt. Bisectus ergo est ABC. Quod erat demonstrandum.

[Coroll. Si recta qua angulum trianguli bifariam secat, bisecet etiam basim, triangulum per hanc prop. erit Isosceles, & bisecans recta erit (n) perpendicularis basi.]

(n) Per n.
3. schol. p.
36. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Triangula sibi mutuo æquiangula, sunt similia;
hoc est, (a) etiam latera aequalibus angulis op. (a) Def. 1.
posita, habent proportionalia. l. 6.

IN triangulis X, Z, angulus A sit par angulo F, & angulus Fig. 8.
C angulo L, & angulus B angulo I; Dico AB esse ad
FI, ut AC ad FL; & AC esse ad FL, ut CB ad LI; & CB
esse ad LI, ut BA ad FI: [Item $AB:AC::FI:FL$; & $AC:$
 $CB::FL:LI$; & $CB:BA::LI:FI$.]

Dem. Si angulus F ponatur supra sibi æqualem A, latera Fig. 8. & 9.
FI, FL, cadent supra latera AB, AC. Et quia (b) angulus (b) Fig. 9.
externus AIL per hypoth. par est interno B, erunt (c) IL, (c) Per 29.
BC parallelæ. Ergo (d) BI est ad IA, ut CL ad LA. Ergo l. 1.
(e) componendo BA est ad IF ut CA ad LF. Quod si an- (d) Per l. 6.
gulus L imponatur Angulo C, eodem modo ostendam AC (e) Per 18.
esse ad FL, ut BC ad IL: & si angulus I, imponatur angulo l. 5.
B, ostendetur pari modo, BC esse ad IL, ut AB ad FI. [&
cum antecedentes BA, AC, CB ad consequentes IF, FL, LI
eandem rationem habeant; erit (f) permutando, $BA:AC::$ (f) Per 16.
 $IF:FL$; & $AC:CB::FL:LI$; & $CB:BA::LI:IF$.] Lique- l. 5.
t ergo propositum.

Corollaria.

1. **S**i in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI,) Fig. 9.
erit triangulum LFI simile toti CFB; ac proinde CF
est ad LF, ut BC ad LI; [Et permutando FC est ad CB, ut
FL ad LI. Item FB ad FC, ut FI ad FL.]

Nam quia LI, BC parallelæ sunt, erunt (g) externi FIL, (g) Per 27.
FLI, pares internis B & C: F vero utrique triangulo est l. 1.
communis. Ergo sunt æquiangula. Ergo latera CF, LF
opposita æqualibus angulis B & FIL, sunt (h) proportiona- (h) Per 16.
lia lateribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F.
[Item, latera circa communem (i) angulum proportionalia (i) Per def.
erunt; hoc est, $FB:FC::FI:FL$.] l. 6.

2. Si in triangulo parallelas AC, LO secet recta BF, ab Fig. 10.
angulo opposito B ducta, secabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. AF est ad LI, ut FB ad IB; & FC (k) Per 17.
quoque est ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF est ad LI ut (k) l. 5.
FC ad IO. Igitur permutando AF est ad FC (l) ut LI (l) Per 16.
ad IO. l. 5.

[3. Si

Fig. 11. [3 Si inter parallelas AB, CD, dua recta EF, GH se invicem decussent in I; eorum segmenta EI, IF; GI, IH erunt proportionalia. Triangula enim EIG, FIH, propter aequales angulos (a) oppositos ad I; atque (b) alternos ad E, F; & ad G, H, erunt aquiangula, & proinde similia. Ergo EI:IF::GI:IH.

Fig. 12. 4. E Corollario primo Turris aut puncti cuiusvis elevati altitudinem per solam baculi umbram definire discimus. Baculum FL solo perpendiculariter desce eo loco ubi radius solis XBA umbram Turris BZ definiens, etiam transeat per L. Erit in triangulo AZB linea FL altitudini turris ZB parallela. Unde ut AF distantia baculi ab umbra mucrone, ad FL baculi longitudinem; ita AZ distantia turris ab umbra mucrone, ad ZB altitudinem Turris. Et Quia tria prima mensurando facile habeantur, habebitur & quartum, Altitudo quaesita. Q. E. I.

Fig. 13. 5. Hinc Tabularum quae Sinus, Tangentes, atque Secantes continent, originem repetimus. Sit enim e. g. circuli semidiameter AC partium 100000: & Angulus BAD graduum 30. (c) Per cor. Quoniam chorda sive subtensa graduum 60 (c) aequalis est 1. p. 15. l. 4. AC semidiametro; BD sinus graduum 30 semissi semidiametri (d) Per cor. sive $\frac{1}{2}$ AC (d) aequalis erit: & proinde partes 50000 continebit. In rectangulo vero triangulo ADB, quadratum AB (e) Per 47. (e) aequale est quadratis AD & BD. Quadretur itaque semidiameter AB (100000 in 100000 ducendo) & ab isto quadrato quadratum BD subtrahere: Reliquum erit Quadratum ipsius AD, aut cosinus eidem (f) aequalis BF: e quo extracta radice dabitur linea BF, seu AD, quae a radio AC (=100000) subducta, relinquit sinum versus DC. Deinde per analogiam (g) Per cor. sequentem (g) AD:BD::AC:CE, habebitur Tangens CE. 1. p. 4. l. 6. Et quoniam est (h) AD:AB::AC:AE; habebitur etiam secans AE. (h) Per id. eandem methodo ex BF sinu recto anguli BAG graduum 60, habebitur ejusdem anguli sinus versus, tangens & secans. Porro, quia (Fig. 9. l. 4.) quadratum circulo inscriptum est (i) duplum quadrati radii; si radius sit post prop. 6. 100000, erit latus quadrati circulo inscripti (hoc est, chorda & 7. lib. 4. graduum 90) aequalis radici quadratica numeri 100000X. (k) Per cor. 100000X2. Unde innotescit dimidium latus, seu (k) sinus 1. prop. 3. rectus gr. 45, ac proinde sinus versus, tangens & secans. lib. 3. Et universaliter, data chorda arcus cuiusvis ad radium proportionem, invenientur arcus dimidii sinus rectus, sinus versus, tangens, secans; item cosinus, cotangens & cosecans. Qui plura volet, adeat Clariss. Wallisi tractatum de sectionibus Angularibus, Operum Vol. 2. pag. 533—601.

Fig. 14. 1. 6. Hinc etiam, si ab angulo quovis A trianguli ABC circulo inscripti, demittatur ad basem perpendicularis AE, & ducatur circuli diameter AD; erit ista perpendicularis AE ad ejus-

dem anguli latus unum AC, ut latus alterum AB est ad circuli diametrum AD. Nam ducta BD, triangula AEC, ABD (a) Per 21. sunt aquiangula; anguli C & D aequales, (a) quia eidem arcui l. 3. BOA insistant; anguli (b) ABD, (c) AEC recti, & proinde (b) Per 31. aequales; Ergo etiam BAD, EAC aequales (d) erunt. Ergo tri- l. 3. angula per hanc prop. similia sunt, & AE:AC::AB:AD. (c) Per hyp. (d) Per cor. l. 3.

2. E. D.

7. circuli diametrum AB (si opus productam) perpendiculariter secet infinita recta EF in C, & in EF sumpto quovis puncto E extra circulum, jungatur AE circulum secans in D: erit subtenfa AD ad circuli diametrum AB, ut AC ad AE. Nam ducta recta DB, triangula ADB, ACE sunt aquiangula: angulus enim A est utrique communis, & anguli ad (e) C, D (f) sunt recti; unde tertius (g) tertio aqualis est. (c) Per hyp. Ergo per hanc prop. triangula sunt similia, & AD:AB::AE:AC. (f) Per 31. l. 3.

Si puncta B, C coincidunt, erit circuli diameter media proportionalis inter AD & AE. Erit enim AD:AB::AC=AB:AE.] (g) Per cor. 9. p. 32. l. r.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuo proportionalia, etiam sibi mutuo aquiangula erunt. Fig. 16.

Hoc est, si AB sit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad RQ, sic CB ad QF; & ut CB ad QF, sic AB ad RF: dico angulos antecedentibus oppositos æquari angulis qui opponuntur consequentibus; nimirum C ipsi I; B ipsi F; A ipsi O.

Ang.	Antec.	Conseq.	Ang.
C	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur (h) B & N æquales erunt. Quia ergo (h) Per cor. triangula P, T sunt æquiangula, erit (i) AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam est AB ad RF, sicut AC ad RQ. Ergo AB est ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF (k) æquantur. Pari modo ostendam æquari QN & QF. Triangula igitur T, S, sibi mutuo sunt æquilatera. l. 5. Igitur anguli I, F, O æquantur (l) angulis Z, N, X, hoc est per constr. angulis C, B, A: Quod erat demonstrandum. l. 1. (i) Per prac. (k) Per 9. (l) Per 8.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Fig. 16.

SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O), & latera (AB, AC; RF, RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt similia.

- Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N.
 (a) Per cor. Igitur anguli quoque (a) B & N æquales erunt. Ostendam, ut in præcedenti, æquales esse RF, RN. Est vero RQ utrisque triangulis S, T communis. Anguli quoque O & X æquales sunt, quia æquantur ambo eidem A; X per const. O per hyp. Ergo etiam I & F (b) æquantur ipsis Z & N. Triangulum igitur S æquiangulum est triangulo T; hoc est, per const. triangulo P. Ergo S, P (c) similia sunt. Quod erat demonstrandum.
- (b) Per 4. l. 1.
 (c) Per 4. l. 6.

[PROPOSITIO VII.

Fig. 8.

SI duo triangula (ABC, FIL) unum angulum (B) uni (I) æqualem habeant; & circa alios angulos (A, F) latera habeant proportionalia, (ut sit $BA:AC::IF:FL$;) & reliquos angulos (C, L) vel simul rectos, vel simul acutos, vel simul obtusos: triangula erunt similia.

(d) Per cor.

9. p. 32. l. 1. Si anguli C, L fuerint recti; ob angulos B, I æquales, triangula erunt (d) æquiangula, & proinde (e) similia.

l. 6.

Si anguli C, L fuerint obliqui, sed homogenei, (hoc est, vel simul acuti, vel simul obtusi,) & anguli A, F æquales fuerint; ob angulos B, I æquales, triangula adhuc erunt (f) æ-

(g) Per 4. l. 6.

quiangula & (g) similia. Ponantur autem A, F inæquales, 9. p. 32. l. 1. & sit A major, & super recta BA ad punctum A, angulo

(i) Per 4. l. 6. F æqualis fiat BAD; & propter angulos B & I æquales, (k) Per hyp. (h) erunt anguli reliqui ADB & L æquales, & triangu-

(l) Per 9. la ABD, FIL erunt (i) similia, & $IF:FL::BA:AD$. & 11. l. 5. Sed $IF:FL::(k) BA:AC$. Ergo $AC = (l) AD$, &

(m) Per 11. in Isoscele ACD, anguli ad basem C & ADC (m) sunt

(n) Per 13. acuti. Ergo ADB est (n) obtusus, & proinde L est obtusus.

l. 1.

Sed

Sed L est angulo C homogeneus (a); & proinde acutus: quod (a) Per hyp. fieri non potest; nam eundem angulum L obtusum esse, ostensum est prius. Non igitur angulus BAC, angulo F inæqualis est. Ergo est ei æqualis; & triangula ABC, FIL sunt æquiangula, & proinde similia. Q. E. D.

Hanc prepositionem (a Tacqueto male omissam) propter usus multiplices omnino restituendam censui.

Corol. 1. Iisdem positis, erit ang. $A = \text{ang. F}$, & ang. $C = \text{ang. L}$.

Corol. 2. Si duo triangula S, T, unum angulum F uni Fig. 16. N æqualem habeant; & circa alios angulos O, X, latera respectivè æqualia; & reliquos angulos I, Z vel simul rectos, vel simul acutos, vel simul obtusos; triangula erunt æqualia. Sunt enim similia per hanc, & schol. p. 7. l. 5. Ergo angulus X angulo O (b) æqualis est; & proinde ipsa etiam triangula (c) æquantur.]

(b) Per def.
1. l. 6.
(c) Per 4.
l. 1.

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo (ABF,) perpendicularis (BC) Fig. 17. ab angulo recto in basim ducta, secatur triangulum in partes totas, & inter se similes.

In triangulis ABF & L, angulus F communis est, anguli vero ABF, & X per hypothesim sunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam (d) æquales erunt. (d) Per cor. Ergo (e) triangula ABF & L similia sunt. Eodem modo similia ostendam esse triangula ABF & R, angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L similia esse, cum æquales sint anguli I & F; A & O; V & X. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

PRimo, BC est media proportionalis inter AC, CF.

Fig. 17.

Cum enim sint in triangulis R & L,
æqu. ang. I. F. | æqu. ang. A. O.
lat. opp. AC. CB. | lat. opp. CB. CF;

Patet (f) AC esse ad CB, ut CB est ad CF.

(f) Per 4.

2. BF est media proportionalis inter AF & CF. Item AB est media inter FA & CA.

Nam in triangulis ABF & L, sunt

æqu. ang. ABF. X. | æqu. ang. A. O.
lat. opp. AF. BF. | lat. opp. BF. CF;

M

Ergo

(a) Per 4.
l. 6.

Ergo AF est (a) ad BF, ut BF ad CF.

Similiter, quia in triangulis ABF & R, sunt

æqu. ang. ABF. V.

æqu. ang. F. I.

lat. opp. AF. AB. | lat. opp. AB. AC;

Erit rursum AF ad AB, ut AB ad AC.

Fig. 17.

(b) Per 4.
l. 6.

[3. In tribus his triangulis ABF, R & L, rectæ aequalibus angulis opposita proportionales (b) erunt. Unde, si prima rationis termini e triangulo ABF, illi secunda rationis e triangulo R, iique tertia rationis ex L sumantur; erit $AB:BF::AC:CB::BC:CF$. Et rursum, $BA:AF::CA:AB::CB:BF$. Denique $AF:FB::AB:BC::BF:FC$. Nam hoc modo ratiocinando, termini homologi aequalibus angulis ubique opponentur.]

PROPOSITIO IX.

Fig. 18.

Datam rectam (AB) dividere secundum datam proportionem (FI ad IL.)

Ducatur infinita AZ; ex qua sume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

[Cor. 1. Hinc datam rectam AB ita secabis, ut tota sit ad partem abscissam BC in data ratione majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, si in recta infinita AZ, capiatur AR = FL, & in recta RA capiatur RQ = LI, & jungatur RB, eique parallela ducatur QC.

Cor. 2. Hinc etiam, datam rectam AC sic producere licebit ad B, ut tota producta AB sit ad partem adjectam BC, in ratione data majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, sumendo in recta infinita AZ, AR = FL, & in recta RA, RQ = LI, ac jungendo QC, eique parallelam ducendo RB, qua in recta AC producta, punctum B determinabit.

Cor. 3. Hinc denique, datam rectam AC sic producere licebit, ut ipsa AC sit ad totam productam in ratione data minoris inæqualitatis, nempe ut FI ad FL, sumendo in recta infinita AZ, rectas AQ, AR, rectis FI, FL respective æquales, & jungendo QC, eique ducendo parallelam RB, qua in recta AC producta punctum B determinabit.]

PRO-

PROPOSITIO X.

Datam rectam (AB) similiter secare ut altera Fig. 19.
data (AI) fuerit secta (in F, C .)

Extremitates sectæ & infectæ jungat recta IB . Huic ex punctis F, C duc parallelas, rectæ secandæ AB occurrentes in L & Q . Dico factum.

Patet ex coroll. 1. p. 2. l. 6.

[Aut etiam, si linea secta IA sit major secanda BQ , sint Fig. 20.
tres circuli se mutuo tangentes diametris IF, IC, IA descripti;
& aptetur subtensa BQ a puncto I ad circumferentiam circuli maximi: circuli duo minores in punctis L, P lineam BQ
secabunt in (a) ratione sectionum diametri IA . Si linea IA (a) Per cor.
secta sit in partes quatuor, circuli quatuor adhibendi sunt; si 2. p. 2. l. 6.
in quinque, circuli etiam quinque; & ita in infinitum.]

Scholium.

EX hac propositione discemus rectam datam in quotvis Fig. 19.
æquales partes secare. Cum recta secanda AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI , in quot secare placuerit AB . Duc rectam IB , eique parallelas FL, CQ . Dico factum.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc Fig. 21.
in modum. Sit AB trisecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, supra vel infra. Ex IX , si est infra AB , cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS , quæ simul majores sint quam AB , minores vero si IX est supra. Per I & A , item per S & B duc rectas; quæ (b) concurrent in (b) Per sch.
 C . Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam AB trisecabunt. p. 33. l. 1.
Demonstratio patet ex coroll. 2. prop. 4.

Rursum cum Maurolyco aliter id ipsum ita obtinebimus. Fig. 22.
Sit quatrifecanda AB . Duc infinitam AX , eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales $AL, LO, OQ, \& BV, VS, SR$, in singulis nempe una pauciores, quam desiderentur in AB : tum rectæ ducantur LR, OS, QV . Hæ quatrifecabunt datam AB .

Nam quia per const. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS , etiam hæ erunt (c) parallelæ. Pari modo (c) Per 33.
 OS, QV sunt parallelæ. Ergo cum AQ sit secta in tres l. 1.
æquales partes, etiam erit AI secta (d) in tres æquales. Si (d) Per cor.
militer l. p. 2. l. 6.

militer erit BC secta in tres æquales. Tota igitur AB secta est in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes sunt faciliores Euclidea, quia pauciores ducendæ sunt parallelæ.

Fig. 23.

Coroll. Hinc Trapezium ABCD, cujus latera AD & BC sunt parallela, in partes quotcunque æquales parti discimus. Producat enim BC ad E, ut fiat CE æqualis AD. Ob angulos alternos DAF, FEC, & ADF, ECF (a) æquales, & bases AD, CE per constructionem æquales, triangula ADF & FCE (b) æqualia sunt; & proinde triangulum ABE Trapezio ABCD æquale. Divisa (c) itaque basi BE in æquales quotcunque partes, puta tres BG, GR, RE, ductisque AG, AR, erit triangulum ABG, vel AGR, vel ARE, trapezii pars tertia, Q. E. I.

(a) Per 27.

l. 1.

(b) Per 26.

l. 1.

(c) Per hoc

schol.

PROPOSITIO XI.

Fig. 24.

Datis duabus rectis (AB, BC,) tertiam proportionalem invenire.

Duc rectam AC. Ex BA producta accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB esse ad BC ut BC ad CL.

(d) Per 1. l. 6.

(e) Per con-

str.

Nam AB est ad AF, (d) ut BC ad CL. Sed AF est (e) par BC. Ergo AB est ad BC, ut BC ad CL; adeoque CL est tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Fig. 25.

Statuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc infinitam CX perpendicularem ad AC, cui in L occurrat AB producta. Dico AB esse ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

Poterit vero proportio data non solum per tres terminos, sed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrime hanc rem, totumque adeo Geometricæ progressionis negotium Gregorius a S. Vincentio profecutus est toto libro 2. sui operis. Nos in gratiam studiosorum succinctam rei propositæ constructionem, ac demonstrationem hic exhibebimus.

Lemma

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR semper con-
tinuetur, venietur ad quantitatem quavis data ma-
jorem. Fig. 26.

Sit LO ad LR ut LR ad LQ, &c. Igitur (a) inver-
tendo, ut QL ad RL, sic RL ad OL. Ergo divid. (b) *Per schol.*
QR ad RL, ut RO ad OL: & permut. (c) QR ad RO, (b) *Per 17.*
ut RL ad OL. Sed RL est major quam OL. Ergo *l. 5.*
etiam QR major quam RO. Pari modo ostendam IQ *(c) Per 16.*
esse majorem quam QR, & sic deinceps. Quoniam igitur *l. 5.*
continuando rationem LO ad LR, ad primam LO
semper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuo crescen-
tes, patet veniri ad quantitatem quavis data majorem.
Quod erat demonstrandum.

Lemma 2.

SI ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB Fig. 26. u-
semper continuetur, ad quantitatem venietur quavis *traque.*
data minorem.

Data sit LO quantumvis parva. Fiat (d) ut BC ad BA, (d) *Per cor.*
sic LO ad LR. Poterit (e) ratio LO ad LR toties conti-
nuari, ut aliquis terminus habeatur, puta LI major quam *3. p. 9. l. 6.*
AB. Quoties vero continuata jam est ratio LO ad LR, per *(e) Per lem.*
totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB,
Erit FB minor quam OL.

Nam ex const. patet IL, QL, RL, OL, esse propor-
tionales ipsis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo ut (f) *(f) Per 22.*
IL ad OL, sic AB ad FB, & permutando (g) ut IL ad *l. 5.*
AB, sic OL ad FB. Sed IL est major (h) quam AB. *(g) Per 16.*
Ergo etiam data OL est major quam FB. Quod erat de-
monstrandum. *(h) Per con-*
str.

Problema.

Data sit ratio majoris inæqualitatis AB ad BC. Opor-
teat hanc per infinitos terminos continuare, & omni-
um summam exhibere. Fig. 27.

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC,
& per LO ducatur recta concurrens (i) cum ABC producta, (i) *Per schol.*
in Z. Dico 1. Si ex C erigas perpendicularem CQ; erit CQ *p. 33. l. 1.*
tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige

M 3

ER;

ER; erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS; erit hæc quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc est AL ad BO, per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. five AB, BC, CE, EF, FI, &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex residuo FZ; cum enim LA (hoc est AB) sit minor quam AZ, etiam FS erit (a) minor quam FZ.

(a) Patet ex
cor. 1. p. 4.
l. 6. & p.
14. l. 5.

Dico 2. AZ est æqualis toti summæ infinitarum proportionalium.

(b) Per idem
coroll.

(c) Per 16.
l. 5. cum
schol.

(d) Per cor.
2. p. 18. l. 5.

(e) Per cor.
3. p. 4. l. 6.

1. Pars: AZ est ad BZ, ut (b) AL ad BO; hoc est, ut AB ad BC: Igitur permutando & invertendo, (c) AB est ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ est ad BZ, (d) ut BZ ad CZ. Sed ut AZ est ad BZ, (e) sic LA est ad OB; & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA est ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo ostendam OB esse ad QC, ut QC ad RE, & sic deinceps in infinitum.

2. Pars: Tota summa infinitorum terminorum, neque minor est quam AZ, neque major; Ergo æqualis. Non est major, quia, cum jam ostenderim supra, QC esse minorem quam CZ, & RE quam EZ, & SF quam FZ, & sic deinceps sine termino; poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. sine fine constitui juxta invicem in recta AZ, sic ut numquam punctum Z [quolibet finito terminorum numero] attingatur; [neque terminorum serie in infinitum continuata, excedi posse rectam AZ, exinde patet, quod tota illa series infinita, in AZ poterit transferri; ac proinde series illa non erit major quam AZ.] Non erit etiam minor quam AZ; quia jam ostendi supra AZ, BZ, CZ esse continue proportionales, & eodem modo idem ostenditur de reliquis EZ, FZ, IZ, &c. Cum igitur, transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, &c. residua EZ, FZ, IZ, &c. semper sint continue proportionalia, ut jam ostendimus; venietur tandem ad residuum (f) dato minus; ac proinde summa proportionalium superabit quantitatem omnem quæ minor sit quam AZ: unde ipsa non potest esse minor quam AZ. Quoniam igitur nec major est, nec minor quam AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(f) Per lem.
2.

Theorema.

Primorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium summa, sunt continue proportionales.

Fig. 27.

In superiori figura ducatur OX parallela AZ. Igitur LX erit differentia primi termini AL seu AB, & secundi BO, seu

feu BC. Quoniam XO est parallela ad AZ; erit LX ad XO, ut (a) LA ad AZ. Sed XO est AB, & LA etiam est (a) *Per cor.* AB. Ergo LX differentia, est ad AB primum terminum, ^{1. p. 4. l. 6.} ut AB primus terminus ad AZ totam summam. Quod erat demonstrandum.

Idem universaliter & brevissime demonstrabitur in omni *Fig. 28.* genere quantitatis hunc in modum. Sint continue proportionales quæcunque, (etiam numeri,) AZ, BZ, CZ, &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentiarum, quæ una cum postrema quantitate IZ, æquantur primæ AZ. Quia vero, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas per lem. 2. evanescit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia est AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & sic deinceps; erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & (b) convertendo, ut AB prima (b) *Per cor.* differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC secunda ^{1. p. 18. l. 5.} differentia ad BZ quantitatem secundam, & sic deinceps; Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, (c) ita omnes differentiarum (hoc est, ut jam ostendi, prima (c) *Per 12.* quantitas AZ,) ad omnes quantitates, hoc est, ad totam ^{l. 5.} summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (AB, BC, AF) quartam *Fig. 29.* proportionalem invenire.

Disponantur datæ rectæ, ut figura monstrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita: Ipsi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB esse ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL est quarta proportionalis quæsitæ.

Scholium.

Pulchre Bettinus noster in suo *Ærario Mathematicæ Philosophiæ*, ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Si tres dentur rectæ; secunda CB & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B sub quovis angulo.

M 4

Per

- (a) *Per* 5. Per puncta C, A, D describe (a) circulum, cui AB prima
l. 4. occurrat in Z. BZ est quarta proportionalis.
(b) *Per* 35. Cum enim rectangula ABZ, CBD (b) æqualia sint, erit
l. 3. AB ad BC, ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut
dixi, non dependet.

Fig. 31. Si dentur duæ rectæ AB, BC; secundæ BC apponatur in
directum BD æqualis BC. Dein ipsam CD in B tangat prima
AB sub quovis angulo. Tum reliqua ut supra. Erit BZ
tertia proportionalis quæsitæ.

Demonstratio similis est; cum enim rectangula ABZ,
CBD sint æqualia, erit AB ad BC, ut BD (hoc est, ut BC)
ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 32.

Datis duabus rectis (AC, CB,) mediam propor-
tionalem invenire.

Tota composita AB bisecetur in O, & centro O descri-
batur circulus per A & B: ex C erige perpendicularem CF,
occurentem peripheriæ in F.

Dico AC esse ad CF, ut CF ad CB.

- (c) *Per* 31. Ducantur enim AF, BF. Triangulum (c) AFB rectangu-
l. 3. lum est, & a recto angulo ducta est perpendicularis FC in
(d) *Per* cor. basim. Ergo AC est ad CF, ut (d) CF ad CB.
1. p. 8. l. 6.

Corollaria.

1. **H**inc patet, si ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta
sit ad diametrum perpendicularis (FC,) eam esse
mediam proportionalem inter diametri segmenta (AC,
CB.)

[Cor. 2. Hinc quoque media proportionalis CF dimidiam ex-
tremarum summam AO superare nequit; & si extrema fu-
erint inæquales, media CF erit illarum dimidio minor. Quod
etiam ex pr. 25. l. 5. supra deductum erat.

Scholium ad Cor. 2. Problema. Data, e tribus proportio-
nalibus, extremarum summa AB, & media DE, invenire ipsas
extremas. Oportet autem mediam proportionalem DE assigna-
ri, dimidiâ AB non majorem, per cor 2.

Super diametro AB circulus describatur, quam ad B
(utrumlibet diametri extremum) tangat GB data DE æ-
qualis, & per G ducatur GF ipsi AB parallela, quæ, quia
DE sive GB radio circuli non est major, circulo occur-
ret in F. A puncto F ad diametrum AB demissa per-
pendicularis

pendicularis FC, ipsam AB dividit in extremas quasitas AC, CB. Nam FC (per cor. 1. hujus) est media proportionalis inter extremas AC, CB: est autem (per prop. 34. l. 1.) $FC = GB$, hoc est, per constr. $= DE$. Factum est igitur quod petebatur. Arithmetice autem invenientur AC, CB ex iisdem datis, si, ducta OF, ex ejus quadrato $= \frac{1}{4} ABq = \text{Quadr. } \frac{1}{2} AB$, subducatur $FCq = DEq$, & relinquetur OCq, cujus radix quadratica OC addita dimidia AB, & ab eadem dimidia subducta, dabit AC, CB quantitates quasitas.

Cor. 3. Hinc etiam tres, vel septem, vel quindecim &c. mediae proportionales, facili negotio inveniuntur, talis scil. quivis mediarum numerus, qui ex continua proportionalium 1. 2. 4. 8. 16. &c. additione oritur; nempe vel unica $= 1$, vel tres $= 1 + 2$, vel septem $= 1 + 2 + 4$, & sic deinceps.

Sint quantitates data A & E; inter quas media sit M, per hanc pr. inventa: deinde inter A & M fac mediam L, atque inter M & E mediam N: erunt L, M, N, tres mediae inter A & E. Et si porro mediae proportionales constituentur inter A & L, L & M, M & N, N & E habebis septem medias inter A & E. Mediae vero inter harum singulas, una cum ipsis septem intermediis prioribus, constituent medias quindecim inter A & E. Atque ita porro.]

Scholium.

HIC locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis solutionem, Platonis hortatu, omnes Graeciae Geometrae summo studio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in (a) Archim. varii recensentur subtilissimi modi, Platonis, Architae Tarentini, Menæchmi, Eratosthenis, Philonis Byzantii, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi; quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P. Gregorius a S. Vincentio, Renatus Cartesius. Ex omnibus visum est tres adferre reliquis faciliores.

(a) Comment. in theor. 1. l. 2. de Sphaera & Cylindro.

Modus Platonis.

OPorteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. Ponantur AB, BC ad rectum angulum, & producantur infinite versus Z & X. Accipiantur deinde duae normae (ita Claudius Richardus noster; Plato enim unica norma utitur, sed (b) cujus lateri DE inserta sit regula mobilis per DE, [ipsa perpendicularis;]) & unius normae angulus D applicetur

Fig. 33.

(b) Vide Fig.

34.

plicetur rectæ BX, ea lege ut & latus unum transeat per A; & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicata norma secunda, transeat per C. Dico BD, BE duas esse medias inter datas AB, BC; hoc est, ut AB est ad BD, sic esse BD ad BE, & BE ad BC.

Demonstratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum est, & ab angulo recto in basim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, sic BD ad BE: Et ob eandem causam, ut BD ad BE, sic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ sunt duæ mediæ BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus est.

Modus Philonis Byzantii.

Fig. 35.

DUæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum: tum perficiatur rectangulum ABCD, & producantur DA, DC infinite, ducanturque [rectanguli ABCD] diametri BD, AC, se secantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod ABCD rectangulum sit, transibit (a) per A, D & C. [Cum enim circulus rectangulo (b) circumscribi poterit; puncta A, B, C, D erunt in circuli circumscripti circumferentia: & propter angulos rectos ABC, BCD, rectæ AC, BD erunt (c) ejusdem circuli diametri, quarum intersectio E, circuli centrum erit. Circulus igitur, eodem centro E & radio BE descriptus, transibit per A, D & C.] Tum regula sic applicetur ad punctum B, ut interceptæ BG, OF sint æquales. Dico AF, GC esse duas medias inter datas AB, BC; hoc est, ut AB est ad AF, sic AF esse ad GC, & GC ad CB.

(a) Patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Demon. Quia GB, OF, (d) æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia sunt rectangula OGB, BFO, (e) Per cor. hoc est rectangula (e) DGC, DFA. Ergo est ut GD, ad DF, (f) sic reciproce AF ad GC. Sed [in triangulo FGD, (f) Per 14. propter BA parallelam basi GD,] GD est ad DF, (g) ut BA ad AF. Ergo (h) ut BA est ad AF, sic AF est ad GC. Rursum quia jam ostendi AF esse ad GC, ut BA est ad AF; est vero BA ad AF, ut GD ad DF, hoc est [propter (h) Per 11. CB parallelam basi DF, in triangulo GDF,] ut GC ad CB; erit (i) quoque AF ad GC, ut GC est ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, sunt continue proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ sunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

(d) Per con-
fr.
(e) Per cor.
1. p. 36. l. 3.
(f) Per 14.
quæ ab hac
non pendet.
(g) Per cor.
1. p. 4. l. 6.
(h) Per 11.
l. 5.
(i) Per eand.

Hi duo modi quamvis sint ingeniosi & faciles; tamen, quia debita normæ & regulæ applicatio non nisi tentando fit, Geometrici non sunt.

Modus

Modus Cartesii.

Paretur instrumentum hujusmodi. Duæ regulæ aperiri Fig. 36. possint & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ in B, C, D, E, F, G, ea lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regula YZ, & norma CD impellat normam DE in regula YX, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & sic deinceps. Dum vero regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc instrumento inter duas datas non solum duæ, sed etiam quatuor & sex, imo quotvis mediæ reperiuntur. Quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus supradictis inventos obtineri potest.

Pro duabus mediis opus est normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & sic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & sit YB; major in regulam alteram YZ, & sit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiuntur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico YC, YD esse duas medias inter datas YB, YE; hoc est, YB esse ad YC, ut YC est ad YD, & YD ad YE.

Demonstratio manifesta est ex cor. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura instrumenti, in trigono YCD angulus ad C rectus est, ab eoque cadit CB perpendicularis in basim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB est ad YC, sic YC ad YD. Rursum, quia in trigono YDE angulus ad D rectus est, ab eoque cadit perpendicularis DC in basim YE, erit ut YC ad YD, sic YD ad YE. Sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continue proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ sunt duæ mediæ YC, YD. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG transeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonstratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum sit Platonico illo operosius, plane eximius est, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imo quocunque medias se extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportionem (a) augentur vel minuuntur, quemadmodum id ipsum in figuris planis efficitur (b) per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut singularem & unicam, omnis Geometrarum posteritas amplexa est.

(a) Vide sch. post 18. l. 12.

(b) Vide cor. 4. p. 20. l. 6.

[Corol.]

Fig. 37.

[Corol. Hinc habetur methodus rationem quamvis minoris inaequalitatis quousque libuerit continuandi. Detur ratio minoris inaequalitatis AO ad AC , quam per plures terminos continuare oportet. Super diametro AC describe semicirculum,

(a) Per 31. cui a puncto A , inscribe $AB = AO$, & indefinite producantur
 l. 3. & def. AB , AC versus P & Q . Junge BC , & erige perpendicular-
 14. l. 1. res CD , DE , EF , FG , &c. Propter angulos rectos (a) ABC ,
 (b) Per cor. ACD , ADE , AEF , AFG , &c. erunt (b) AB , AC , AD , AE ,
 2. p. 8. l. 6. AF , AG , &c. continue proportionales.

Fig. 38.

Idem etiam obtinebitur, quamvis angulus ABC non sit re-
 ctus. Occurrant sibi invicem in quovis angulo BAC , rectae
 AB , AC ; & producantur ut supra, versus P , Q ; jungatur-
 que BC . Tum angulo ABC fiant aequales anguli ACD , ADE ,
 AEF , &c. Et triacula ABC , ACD , ADE , &c. propter

(c) Per cor. illos angulos aequales, & angulum A communem, erunt aequi-
 9. p. 32. l. 1. angula (c) & similia (d). Ergo $AB:AC::AC:AD::AD:$

(d) Per 4. $AE::AE:AF$, &c.]
 l. 6.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 39, 40.

Parallelogramma aequalia (X , Z) quae unum an-
 gulum (C) uni (O) habent aequalem, etiam
 latera circa aequales angulos habent reciproca: (hoc
 est, AC est ad CB , ut FO ad OL .)

Et si latera sic habent reciproca, parallelogramma
 sunt aequalia.

[Ponantur latera AC , OB ita in directum, ut aequales anguli C , O , jaceant ad partes contrarias rectae AB : & propter

(e) Per 13. angulos C , & LCB duobus rectis (e) aequales, erunt LCB &
 l. 1. O duobus rectis aequales, & proinde FO , CL (f) sunt in di-

(f) Per 14. rectum.]

l. 1.

1. Pars. IL & SB productae concurrant in Q . Parallelo-
 (g) Per 1. grammum X est ad parallel. R , ut AC (g) ad CB : & Z

l. 6.

est ad (h) R , ut FO ad OL . Sed quia per hyp. X & Z

(h) Per eand.

aequalia sunt, X est (i) ad R , ut Z est ad R . Ergo etiam

l. 5.

AC est ad CB , ut (k) FO ad OL . Quod erat demon-

(k) Per 11.

strandum.

l. 5.

Dem. 2. pars. Ut AC ad CB , sic (l) X est ad R : & ut

(l) Per 1.

FO ad OL , sic (m) Z ad R . Sed jam per hyp. AC est ad

l. 6.

CB , ut FO ad OL . Ergo X est ad R , (n) ut Z est ad R .

(m) Per e-

and. Ergo X & Z aequalia (o) sunt.

(n) Per 11.

[Corollarium. Hinc pendet regula proportionum inversa,

l. 5.

sive reciproca demonstratio, quae ex datis tribus terminis, quar-

(o) Per 9. l. 5.

tum

tum invenit multiplicando in se invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, ut inde habeatur terminus quartus. Sicut enim in regula directa spectatur aequalitas rationum,

ut si fuerit $A:B::C:D$, erit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, (ubi quotus termini

primi per secundum divisi, quotus tertii per quartum divisi aequatur.) ita in regula inversa spectatur aequalitas rectangulorum, sive factorum, ita ut rectangulum sub primo & secundo, aequale sit rectangulo sub tertio & quarto. Ex. gr. si fuerint $A, B; C, D$ reciproce proportionales, (hoc (a) est, si $A:(a)$ Per def. $C::D:B$.) erit (per hanc prop.) $A \times B = C \times D$; & proinde 2. l. 6.

de, si facta ista aequalia per terminum tertium C dividantur, exorietur quotus $\frac{A \times B}{C} = D$ per termino quarto.

Sint quantitates $AB, BC; LI, IF$ reciproce proportionales: Fig. 44.

Erit $IF = \frac{AB \times BC}{LI}$. Ex gr. sit AB linea perticarum 40,

BC pertic. 4. Erit $AB \times BC$, sive rectang. X pertic. 160, sive jugerum Anglicum. Proponatur jam jugerum aliud Z , perticas 16 longum, ut LI , & queratur ejus latitudo IF . Ob aequalitatem rectangulorum X & Z , cum rectang. X majorem habeat longitudinem quam sibi aequale Z , minorem latitudinem habebit; ac proinde minor longitudo LI jugeri Z majorem latitudinem IF , pro regula inversa natura, postulat. Et aequalibus rectangulis, $AB \times BC, LI \times IF$, per LI divisis, oritur quotus $\frac{AB \times BC}{LI} \left(= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16} \right) = IF = 10$. Ergo juxe-

rum Z latum est 10 perticas. Q. E. I.]

PROPOSITIO XV.

Æ Qualia triangu^{la} (ACL, FCB) qua^m unum^{Fig. 41, 42} angulum (C) uni (O) aequalem habent, etiam latera circa aequales angulos habent reciproca: (hoc est, AC est ad CB , ut FO ad OL .)

Et si latera sic habent reciproca, triangu^{la} sunt aequalia.

[Ponantur AC, OB in directum, prout in prop. præced. Erunt etiam LC, OF in directum; &] ducatur recta LB : reliqua demonstratio eadem est quæ præcedentis.

Corol-

Corollarium.

TAM parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases & altitudines sunt æqualia: Et e converso.

Patet ex duabus præcedentibus [rectangula parallelogramma (Fig. 39.) vel triangula rectangula (Fig. 42.) qua reciprocant bases AC, CB, & altitudines OL, OF; æqualia esse.

Et cum parallelogramma vel triangula obliquangula quacunque, (a) æqualia respective sint parallelogrammis vel triangulis rectangulis super eadem basi vel æquali, & ejusdem altitudinis; æquabuntur etiam parallelogramma vel triangula quacunque qua reciprocant bases & altitudines.

Et e converso, cum rectangula parallelogramma æqualia, & rectangula triang. æqualia, (Fig. 39. 42.) reciprocant (b) bases & altitudines: Et cum parallelogramma & triangula quacunque, (c) æqualia (c) sint parallelogrammis & triangulis rectangulis super eadem basi vel æquali, & ejusdem altitudinis; Liquet æqualia quacunque parallelogramma, & æqualia quacunque triangula, bases habere altitudinibus suis respective reciprocas.

Fig. 43.

Scholium. Sint duo triangula ABC, DBE quorum anguli ad B simul sumpti æquales sint duobus rectis; sintque latera circa angulos ABC, DBE reciproca; Erunt triangula ista æqualia: Si vero triangula fuerint æqualia; latera circa angulos

(d) Per 14. los ABC, DBE erunt reciproca. Compleantur enim parallelogramma BF, BG; & propter angulos ad B duobus rectis æquales, rectæ CB, BE in directum (d) jacent; & propter parallelas CBE, DF, anguli (e) alterni ABC, BDF sunt æquales: Et quoniam (f) est AB ad BD, ut EB ad BC; est autem EB ipsi DF (g) æqualis; erit etiam AB:BD::DF:BC; hoc est, (h) Per def. latera circa æquales angulos ABC, BDF (h) sunt reciproca: ergo parallelogramma (i) BG, EF sunt æqualia; & proinde (i) Per 14. (k) eorum dimidia ABC, DBE æqualia erunt.

Eodem modo, si triangula ABC, DBE æqualia sint, & habeant angulos ABC, DBE duobus rectis æquales; erit AB:BD::EB:BC. Compleantur enim parallelogramma BF, BG, quæ erunt triangulorum (l) æqualium dupla, & proinde æqualia; & propter parallelas (m) CBE, DF, etiam (n) æquiangula: ergo latera circa æquales angulos (o) sunt reciproca; hoc est, AB:BD::DF sive BE:BC. Q. E. D.]

(o) Per 14. l. 6.

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor rectæ ($AB, FI; IL, BC$) fuerint proportionales; (hoc est, si AB sit ad FI , ut IL ad BC ;) Rectangulum (X) sub extremis (AB, BC) æquale est rectangulo (Z) sub mediis, (FI, IL .)

Et si rectang. sub extremis æquetur rectangulo sub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z , circa rectos angulos, ac prout æquales B, I , per hyp. est AB ad FI , ut reciproce IL ad BC . Ergo (a) X & Z æqualia sunt. Quod erat demonstrandum. (a) Per 14. l. 6.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponuntur æqualia; Ergo circa æquales angulos B & I , est AB ad FI , (b) ut reciproce IL ad BC . Quod erat demonstrandum. (b) Per eand.

[Coroll. 1. Hinc ad datam rectam lineam AB facilis est datum rectangulum Z applicare: faciendo (c) nimirum $AB:FI::IL:BC$, & rectangulum X sub AB, BC (d) construendo. Est enim X dato Z (e) æquale rectangulum ad datam rectam AB applicatum. Idem aliter efficies per cor. & schol. p. 44. l. 1. (c) Per 12. l. 6. (d) Per sch. p. 46. l. 1. (e) Per hanc

Cor. 2. Hinc pendet regula proportionum directæ demonstratio, qua ex datis tribus terminis, quartum proportionalem invenit, multiplicando secundum & tertium in se invicem, & factum dividendo per terminum primum. Nam per hanc prop. si $AB:FI::IL:BC$, erit $AB \times BC = FI \times IL$, & dividendo

æqualia facta per AB , erit $BC = \frac{FI \times IL}{AB}$. Sic si proponatur

numeris 5, 3, 10. quartum proportionalem invenire, jubet regula proportionum directæ, numeros 3 ac 10 in se invicem ducere, ac productum 30 dividere per 5, ut inde oriatur numerus quæsitus 6.

Coroll. 3. Hinc etiam, demonstratur regula practica, qua fenestrarum, alique ejusmodi artifices quibus opus est areas rect. angulas minores dimetiri, rectanguli aream ex unius linea rectæ dimensione, absque ulla operatione Arithmetica colligere solent. Si queratur v. gr. quot pedes quadratos contineat rectangulum $ABCD$; ab angulo B , lateri BC applicetur mensura pedis unius BE , & ab angulo A , altero lateris AB termino, per mensuræ pedalis extremum punctum E tendatur filum, quod occurrat lateri DC (producto si opus) in F . Quot pedes longitudine, vel partes pedis quasvis contineat recta DF , tot pedes quadratos

quadratos, vel pedis quadrati similes partes continebit rectangulum $ABCD$. Nam propter angulos B & D rectos, & angulos BAE , DFA alternos inter parallelas AB , DF , itemque angulos BEA , DAF alternos inter parallelas BE , AD , trian-

(a) Per 4. $l. 6.$ $gula EBA$, ADF (a) erunt similia, & proinde $EB:BA::AD:DF$. Quare, per hanc prop. erit rectang $BA \times AD =$ rectang.

$EB \times DF$. Sed $BA \times AD$ est rectangulum cujus mensura proponebatur investiganda. Cui aequale rectangulum $EB \times DF$, pro altitudine habens rectam EB mensura pedali aequalem, tot pedes quadratos, vel pedis quadrati partes quasvis continebit,

(b) Sequitur quot pedes longitudine, vel pedis partes similes continet (b) basis ex 1. $l. 6.$ DF . Quot igitur pedes contineat recta DF longitudine, tot pedes quadratos continebit rectangulum $ABCD$. Q. E. D.

9. ?
+ 2 vel 3, i. e. { Si BE fuerit mensura bipedalis, vel tripedalis, &c. area rectanguli in pedibus quadratis habebitur, multiplicando DF per per numerum + 4, vel 9, &c. respective, hoc est, per quadratum istius numeri pedum ex quo mensura constat.

Fig. 44.

Cor. 4. Si quatuor rectae AB , FI ; IL , BC fuerint proportionales: Erit triangulum ABC sub prima pro basi & sub quarta pro altitudine, aequale triangulo FIL sub secunda pro basi & sub tertia pro altitudine. Sunt enim rectangulorum

(c) Per 34. $l. 1.$ X , Z , per hanc pr. aequalium, (c) dimidia.

Fig. 41, 42.

Cor. 5. Si duo triangula ACL , FOB , angulos C & O aequales habeant; & sit rectangulum $AC \times CL$ sub lateribus anguli C , aequale rectangulo $FO \times OB$ sub lateribus anguli O ; triangula ACL , FOB erunt aequalia: & e converso, si triangula ACL , FOB , quae angulos ad C & O aequales habeant, fuerint aequalia, rectangula $AC \times CL$, $FO \times OB$ erunt aequalia. Idem etiam equiangulis parallelogrammis accidit. Nam propter aequalia rectang. $AC \times CL$, $FO \times OB$; erit per hanc prop. $AC:FO::OB:CL$; & proinde, cum in triangulis ACL , FOB equiangulis ad C & O , latera circa aequales angulos sint reciproca; triangula ACL , FOB erunt (d) aequalia: quod erat primum.

(d) Per 15. $l. 6.$

Deinde habeant triangula aequalia ACL , FOB angulos C & O aequales; (e) erunt igitur latera circum aequales illos angulos reciproce proportionalia, hoc est, $AC:FO::OB:CL$; & proinde per hanc prop. erit rect. $AC \times CL =$ rect. $FO \times OB$; quod erat alterum.

Fig. 39, 40.

Denique eadem eodem modo de parallelogrammis equiangulis similiter se habentibus demonstrabuntur, si loco prop. 15. citetur prop. 14.

Cor. 6. Si A fuerit ad B in maiori ratione quam C est ad D ; erit rectangulum sub extremis majus rectangulo sub mediis. Et si in minori; minus.

1. Quia

1. Quia enim A majorem habet rationem ad B quam C ad D ; erit alia quadam quantitas E (qua minor est quam A) ad B , ut C ad D ; ac proinde per hanc prop. $E \times D = B \times C$. Sed E minor est quam A : ergo $A \times D$ majus est quam $B \times C$.

2. Si vero A fuerit ad B in minori ratione quam C est ad D ; erit alia quadam F , (qua ipsa A major est) ad B , ut C ad D . Ergo $F \times D = B \times C$; ac proinde $A \times D$ minus est quam $B \times C$.

Cor. 7. Hinc, si rectangulorum inæqualium latera ita disponantur, ut rectanguli majoris latera in partibus extremis, & minoris latera in mediis constituentur; habebit primus terminus ad secundum majorem rationem quam tertius ad quartum. Si vero rectanguli minoris latera statuuntur in partibus extremis, & majoris latera in mediis; erit primus terminus minor respectu secundi, quam tertius est respectu quarti.

Scholium. cum celebre illud Ptolemai theorema, scilicet, In Fig. 47
omni quadrilatero circulo inscripto, Rectangulum ex diagoniis AC in BD , æquale esse duobus rectangulis ex lateribus oppositis, AB in CD , & AD in BC , tum ex hac, tum ex propositionibus passim ante demonstratis dependeat, illud jam demonstrandum proponamus. Fiat enim angulus BAE æqualis angulo CAD . Ob angulos BAE , CAD æquales per constructionem, & angulos ABE , ACD eidem arcui AD insistentes (a) æquales; (b) Erunt triangula ABE , ACD similia, (b) Per cor. & $AB:BE::AC:CD$; & proinde (c) rectangulum extremorum $AB \times CD$ æquabitur rectangulo mediorum $AC \times BE$. Pa-
riter, ob angulum BAE angulo CAD æqualem per constructionem, addito communi CAE , erit angulus BAC angulo EAD æqualis: & ob angulos ADE , ACB , eidem arcui AB insistentes, (d) æquales; (e) erunt triangula ADE , ACB similia, & $AD:DE::AC:CB$, & proinde (f) rectangulum extremorum $AD \times CB$, æquale erit rectangulo mediorum $AC \times DE$. Sed rectangula $AC \times BE$ & $AC \times DE$ æquantur rectangulo $AC \times BD$. Ergo rectangulum $AC \times BD$ sub diagoniis æquatur rectangulis $AB \times CD$ & $AD \times BC$ sub lateribus oppositis, Q. E. D.]

PROPOSITIO XVII.

Fig. 48.

SI tres rectæ (AB , FL , BC) fuerint proportionales, rectangulum sub extremis (AB , BC) æquale erit quadrato mediæ (FL .)

Et si rectangulum sub extremis æquetur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ FL accipiat par O . Quoniam igitur per hyp. AB est ad FL , ut FL ad BC ; estque O par FL ; (a) Per prac. Erit quoque AB ad FL , ut O ad BC . Ergo (a) rectang. sub extremis AB , BC æquatur rectangulo sub mediis FL & O , hoc est quadrato FL .

2. Pars. Demonstratur similiter ex secunda parte præcedentis.

Corollaria.

Fig. 32.

EX hac & ex 13. patet, si in circulo sit FC perpendicularis diametro, rectangulum ACB æquale esse quadrato FC .

Fig. 48.

[Cor. 2. Hinc ad datam rectam AB , data recta FL quadratum FO facile est applicare, inveniendū rectis AB , FL (b) l. 6. tertiam proportionalem BC , & rectang. ABC (c) construendo. (c) Per sch. Est enim dato quadrato FO (d) æquale rectangulum ABC ad p. 46. l. 1. rectam AB applicatum. (d) Per hanc pr.

Cor. 3. Hic etiam liquet methodus rationem quamvis AB ad FL continuandi, siue duabus datis AB , FL tertiam proportionalem inveniendi; si nempe, consequentis FL quadratum ad antecedentem AB applicetur, habebitur tertia proportionalis BC . Si vero in numeris detur ratio quævis, inuenietur tertius proportionalis, multiplicando consequentem per seipsum, & productum dividendo per antecedentem: quotus enim (e) erit tertius proportionalis quaesitus.

Fig. 17.

Cor. 4. Hinc lineam inaccessam, cujus terminus alter est accessibilis, metiri discimus. Sit linea inaccessa CF , & producatur FC indefinite versus A . Erigatur a puncto C linea perpendicularis CB : & ad quodvis istius perpendicularis punctum B applicetur Norma, aut angulus quivis rectus ABF , ita ut per latus BF respiciendo, punctum F , & per latus BA punctum A in recta ACF observentur. Mensuretur linea AC accessibilis, & ex analogia sequenti innotescet (f) inaccessa CF . AC : (f) Per cor. 1. p. 8. l. 6. CB : CB : CF . Quadratum itaque lineæ CB dividatur per lineam (g) Per cor. am AC , & Quotiens (g) dabit lineam quaesitam CF . Q. E. I. 3. hujus. Cor. 5.

Cor. 5. Hinc si detur rectangulum sub AC, CB segmen-
tis recta data AB, æquale scil. quadrato data recta CF,
dimidio ipsius AB non majoris, in proclivi erit invenire rect-
anguli latera AC, CB; sive, datam rectam AB ita dividere
licebit in C, ut rectangulum sub ipsius segmentis AC, CB æ-
quetur quadrato data recta CF, quæ dimidium ipsius AB non
superat. Cum enim data CF sit per hanc prop. media propor-
tionalis inter AC & CB segmenta recta data AB, idem erit
hoc problema cum illo, cujus solutio in Schol. ad cor. 2. pr. 13.
hujus libri jam supra traditur.

Scholium 1. Si (a) trianguli cujuscunque ABC an-
gulus verticalis BAC bisecetur recta DA, quæ basem BC
dividat in duo segmenta BD, DC; Erit differentia rectan-
gulorum a lateribus AB, AC, & a segmentis basis BD, DC,
æqualis quadrato rectæ AD bisecantis angulum BAC. [Hoc
est, rect. BAC — rect. BDC = ADq.] Triangulo enim ABC
circumscribatur circulus, & producaturs AD donec iterum oc-
currat circulo in E, & connexa EC, in triangulo AEC per
punctum D ducatur basi EC parallela DF; eruntque triangu-
la ADF, AEC (b) similia: sed & propter angulos BAD, EAC
(c) æquales, & angulos ABD, AEC in eodem segmento ABEC,
& proinde (d) æquales, triangula ABD, AEC similia (e)
erunt: triangula igitur ABD, ADF similia sunt; & AB:
AD :: AD: AF; unde per hanc prop. rectangulum BAF æ-
quatur ADq. Sed AD: AF :: (f) DE: FC. Ergo AB: AD ::
DE: FC; & rect. BA × FC (g) = rect. ADE = (h) rect. BDC.
Et utrumque rectang. BAF, & BA × FC, hoc est, (i) BAC
æquabitur ADq + rect. BDC, & utrinque auferendo rectang.
BDC, erit BAC rect. — BDC rect. = ADq. Q. E. D.

Cor. ad Schol. 1. Si trianguli ABC circulo inscripti an-
gulus verticalis A bisecetur recta AE eidem circulo inscripta,
quæ secet basim in D; erit BA: AD :: EA: AC. Triangula
enim BAD, EAC similia sunt, uti e scholio precedente constat.

Scholium 2. Sequentis etiam problematis, quod usui erit
in Sphericis, ex ante demonstratis, jam tradi potest inve-
niendi ratio. Per duo puncta B, C in circulo dato FDM,
circumferentiam circuli ducere, quæ dati circuli circumfe-
rentiam dividat bifariam. Per centrum A & unum e punctis
datis B, ducatur recta BAME infinita; ad quam e centro eri-
gatur perpendicularis AD, & ducatur BD; & in triangulo
ABD, propter angulum BAD rectum, erit (k) ABD acutus. Ad
BD fiat normalis DE, quæ propter angulos ABD, BDE duobus
rectis minores, (l) interfecabit lineam infinitam BAME, ut in
puncto E. Denique circulus BRE ducatur per (m) tria puncta
B, C, E. Dico factum. Ducatur enim circuli jam descripti BRE

chorda, per circuli dati centrum A , & alterutram peripheriarum intersectionem G , nimirum $GA\Phi$. Ducatur etiam circuli dati FDM , diameter $GA\Phi$, per eandem peripheriarum intersectionem G .

- Quoniam ab angulo recto trianguli BDE , demittitur DA
- (a) Per cor. perpendicularis basi BE , (a) erunt AB , AD , $AE \div \div$, & pro-
1. p. 8. l. 6. inde per hanc prop. rectang. $BAE = ADq$; id est, ob circuli
(b) Per p. dati FDM aequales radios AD , AG , AF , erit rect. $BAE =$
35. l. 3. rect. $GA\Phi$. Cum vero in circulo BRE , recta BE , $G\Phi$ se mu-
(c) Per 1. tuo secant in A , (b) erit rect. $BAE =$ rect. $GA\Phi$. Unde
l. 6. $GA\Phi$ rect. $= GA\Phi$ rect. Ergo (c) $AF = A\Phi$: & puncta F , Φ
(d) Per def. coincident: atque arcus $FDG =$ (d) arcui FMG . Q. E. I.
20. l. 1. Fig. 51. Schol. 3. In circulo quovis cujus diameter est AB , & ar-
cum AC , AD sinus recti sunt CE , DF ; sinus versi AE , AF ;
(e) Per cor. subtensa AC , AD : Erit $AE : AF :: ACq : ADq$; hoc est, sinus
2. p. 8. l. 6. versi erunt ut quadrata subtensarum. Ductis enim BC , BD ,
(f) Per (e) erunt BA , AC , $AE \div \div$; (f) itemque BA , AD , $AF \div \div$.
idem. (g) Ergo $BA \times AE = ACq$, & $BA \times AF = ADq$. Sed
(g) Per hanc $AE : AF ::$ (h) $BA \times AE : BA \times AF$. Ergo $AE : AF ::$
prop. $ACq : ADq$.
(h) Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 52.

Super data recta (RS) dato polygono (BQ) simile similiterque possum describere.

- Polygonum datum BQ resolve in triangula. Super data
- (i) Per 23. recta RS fac (i) angulos R , O aequales angulis B , A . Co-
l. 1. ibunt (k) latera in X . Super XS fac angulos V , I aequales an-
(k) Per cor. gulis T , C . Coibunt latera in Z . Dico factum.
17. p. 32. l. Nam quia anguli R , O aquantur angulis B , A , etiam E ,
1. & sch. p. K (l) aequales erunt: & quia etiam (m) V aequatur T , to-
31. l. 1. tus EV toti KT aequalis erit. Similiter quia singuli O ,
(l) Per cor. I aquantur singulis A & C , toti OI , AC aequales erunt. Et
9. p. 32. l. 1. (m) Per con- quia V & I aquantur T & C , etiam Z & Q aequales
str. (n) sunt. Polygona igitur RZ , BQ sibi mutuo aequiangula
(n) Per cor. sunt. Reliquum est ut ostendatur etiam latera esse propor-
9. p. 32. l. 1. tionalia. RS est ad SX , (o) ut BF ad FL : & rursum SX
(o) Per 4. est ad SZ , (p) ut FL ad FQ . Ergo ex aequo (q) RS est ad
l. 6. SZ , ut BF ad FQ , &c.
(p) Per eand.
(q) Per 22. l. 5. Corollarium. Hinc Mappas sive chartas Geographicas, cho-
rographicas, vel Geodaticas; aut agrorum, adificiorum, regi-
onumque delineationes Ichnographicas construendi methodus de-
rivatur. Nihil enim aliud sibi volunt hujusmodi delineatores,
quam figurarum ingentium ad similes figuras exiguas reductionem,
quam praesens propositio exhibet. PRO-

PROPOSITIO XIX.

Triangulorum (X, Z) similium proportio est duplicata proportionis laterum (AC, FI) aequalibus angulis subtenforum. Fig. 53, 54.

Hoc est, si (a) fiat ut AC ad FI , sic FI ad tertiam AQ ; (a) *Per 11.* triang. X est ad triang. Z , ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ . Vide defin. 10. l. 5.

Quoniam triangula X, Z sunt similia, erit BA ad LI , (b) *Per 4. l. 6.* ut AC ad IF . Sed per constr. ut AC ad IF , sic IF ad AQ . Ergo etiam BA est ad LI , (c) ut IF ad AQ . Ergo (c) *Per 11.* [*jun. 7. a B Q.*] in triangulis QBA & Z , latera circa angulos A, I , qui per defin. triangulorum similium æquales existunt, sunt reciproca. Æquantur igitur (d) QAB & Z . *Per 15. l. 6.* Atqui triangulum X ad QBA est ut (e) basis AC ad basim LI . *Per 1. l. 6.* AQ . Ergo etiam X est ad Z , ut AC ad AQ . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona ($ABCDE, FGHIK$) dividuntur (1.) in similia triangula (P, S , & Q, T , & R, V ,) numero equalia; (2.) & totis proportionalia: (3.) & polygonorum proportio duplicata est proportionis laterum (AB, FG) inter æquales angulos (B, G & BAE, GFK) existentium. Fig. 55.

1. Pars. Quoniam polygona sunt similia, erunt (f) sibi (f) *Per def.* mutuo æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, GFK , & B, G , & BCD, GHI , & CDE, HIK , & E, K . Quia igitur AB est ad BC , (g) ut FG ad GH , angulique (g) *Per eand.* B & G æquales sunt, similia (h) sunt triangula P, S . Simi- *Per 6. l. 6.* liter demonstrabitur similia esse R & V . Deinde quia anguli toti BCD, GHI , & ablati BCA, GHF æquales sunt, etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo ostendam æquari angulos ADC, FIH . Ergo (i) tertius CAD (i) *Per cor.* tertio HFI æqualis est. Quare (k) etiam Q & T triangula *Per 32. l. 1.* similia sunt. Liquet ergo 1. pars. *(k) Per 4. l. 6.*

2. Pars. Quoniam similia sunt P & S , ratio P ad S duplicata est (l) rationis CA ad HF . Sed ob eandem causam (l) *Per præc.*

- etiam ratio Q ad T duplicata est rationis CA ad HF. Ergo
- (a) *Per 34.* P est ad S ut (a) Q ad T. Eodem modo ostendam ut Q
l. 5. est ad T, ita R esse ad V. Ergo ut (b) unum antecedens P
 (b) *Per 12.* est ad unum consequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R
l. 5. simul sumpta, ad omnia consequentia S, T, V simul sumpta,
 hoc est, ita polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.
- (c) *Per prac.* 3. Pars. Ratio P ad S est (c) duplicata rationis AB ad
 FG. Sed ratio polygoni ad polygonum est eadem cum ra-
 tione P ad S, ut jam ostendi. Ergo etiam ratio polygo-
 ni ad polygonum est duplicata rationis AB ad GF. Quod
 erat tertium.

Corollaria.

1. **O**mnes figuræ ordinatæ seu regulares, ut æquilatera tri-
 angula, quadrata, pentagona, &c. sunt inter se in
 ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ sunt si-
 milis inter se, ut patet ex def. 1. l. 6.

[2. Si tres rectæ fuerint proportionales; erit prima ad
 tertiam, ut figura quævis plana (sive sit triangulum, sive
 quadrilaterum, seu polygonum quodcunque) super prima, ad
 figuram similem, similiterque descriptam super secunda; vel
 erit rectarum proportionalium prima ad tertiam, ut figura
 quævis plana super secundâ, ad figuram similem, similiterque
 descriptam super tertiâ. Nam per def. 10. l. 5. trium pro-
 portionalium prima est ad tertiam in duplicata ratione prima
 ad secundam, vel secundæ ad tertiam. Unde per prop. 19.
 vel hanc 20. liquet propositum.]

Fig. 55.

3. Si figurarum quarumvis simillium latera AB, FG inter
 æquales angulos posita, sint nota, etiam proportio figura-
 rum innotescet. Sit, ex. gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum.
 Fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum, nempe 18. Fi-
 gura minor est ad (d) majorem, ut 2. ad 18. seu ut 1. ad 9.
 (d) *Per cor.* 2. hujus. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, si (e) se-
 (e) *Per cor.* condus datorum multiplicetur per seipsum, & productus
 3. p. 17. l. 6. per primum dividatur.

Fig. 56.

4. Ex eadem propositione elicitur methodus præclara,
 figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ra-
 tione data. Ut si velis pentagoni, cujus latus est AB, aliud
 facere quintuplum [quod sit dato simile:] Inter terminos
 (f) *Per 13.* rationis datæ AB, BC, inveni (f) mediam proportionalem
 l. 6. BX. Super hac construe (g) pentagonum simile dato. Hoc
 (g) *Per 18.* erit quintuplum dati.
 l. 6.

Nam per cor. 2. hujus, pentagonum super AB est ad sibi
 simile super BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro

Porro, cum etiam circulorum proportio sit duplicata proportionis diametrorum, ut ostendetur p. 2. l. 12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

[Cor. 5. Si figurarum quarumvis similium proportio sit Fig. 55; nota; innotescet etiam proportio laterum inter aequales angulos existentium, utpote quæ subduplicata sit proportionis figurarum. Sit, ex gr. figura PQR ad figuram STV, ut 4 ad 9. Inter 4 & 9 inveniatur medius proportionalis 6, (nempe (a) extra (a) Patet ætione radicis quadratice numeri $36 = 4 \times 9$.) & cum sint 4, 6, 9 $\div \div$, sintque figura PQR, STV ad se invicem ut 4 ad 9, erunt illarum latera homologa ut (b) 4 ad 6, sive ut 2 ad 3. (b) Per cor.]

Cor. 6. Hinc corrigendus est eorum error, qui figurarum 2. hujus; similium eandem atque laterum rationem esse opinantur. Si enim duorum, non tantum triangulorum similium, sed & quadratorum, pentagonorum, hexagonorum, &c. (aut etiam circulorum) latera (sive diametri) sint inter se ut 2 ad 1; Ipsa figura sive area erunt ut 4 ad 1: si latera sint inter se ut 3 ad 1, erunt figura ipse sive area ut 9 ad 1; in duplicata scilicet laterum (vel diametrorum) ratione. Sunt enim 4, 2, 1 $\div \div$; Item 9, 3, 1 $\div \div$.

Schol. Cum quadratorum E, K proportio duplicata sit pro- Fig. 57; portionis laterum OR, SV; inde ratio duplicata laterum OR, SV, per rationem ORq ad SVq sæpissime designari solet: v. gr. si super lateribus OR, SV fiant alia quavis figura similes & similiter posita; cum sint ea in ratione duplicata laterum OR, SV, erunt ad se invicem ut quadratum E ad quadratum K, sive ut ORq ad SVq.]

PROPOSITIO XXI.

Figura rectilinea (A, B) quæ eidem (C) similes Fig. 57; sunt, etiam sibi mutuo similes sunt.

Patet ex defin. 1. l. 6. axiom. 1. l. 1. & propof. 11. l. 5.

[Quia enim tam figura A quam B, figura C similis est; erit illarum utraque ipsi C aequiangula, & circa aequales angulos latera ipsius C lateribus habebit proportionalia. Ergo A ipsi B aequiangula erit, & latera circa ipsarum A & B aequales angulos erunt proportionalia; & proinde figura A & B similes erunt.]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 57.

SI quatuor aut plures rectæ (FI , LQ , & OR , SV) proportionales fuerint; figura rectilinea similes, similiterque ab iis descriptæ (A , B , & E , K) proportionales erunt.

Et e converso, [Si proportionales fuerint figura rectilinea (A , B , & E , K) similes, & similiter descriptæ super rectis (FI , LQ , & OR , SV ;) erunt etiam ipsæ lineæ rectæ proportionales.]

Demonstratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam (a) Per 19. enim rationes A ad B , & E ad K sunt (a) duplicatæ ratio- & 20. l. 6. num FI ad LQ , & OR ad SV , ex hypothesi æqualium; etiam ipsæ æquales erunt.

Pars 2. patet ex 35. l. 5. [Quia enim rationes æquales A (b) Per easd. ad B , & E ad K , (b) duplicatæ sunt rationum FI ad LQ , & OR ad SV ; etiam hæ æquales erunt.]

Cor. 1. Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices quadraticas. Si enim multiplicentur inter se quantitates signis radicalibus affixæ, & producto præfigatur ejusdem radicis signum; habebitur radicum datarum productum. Ex gr. sit $\sqrt{5}$ multiplicanda in $\sqrt{3}$: dico provenire $\sqrt{15}$. Nam ex multiplicationis definitione debet esse unitas ad multiplicantem (sive $\sqrt{3}$.) ut multiplicandus (seu $\sqrt{5}$) est ad productum. Ergo per hanc prop. erit quadratum unitatis ad quadratum multiplicantis, ut quadratum multiplicandi ad quadratum producti; hoc est, si pro numero producto ponatur P , erit $1. 3 :: 5. Pq$. Sed $1. 3 :: 5. 15$. Ergo $Pq = 15$, & $P = \sqrt{15}$.

Rursum, si proponatur $\sqrt{15}$ dividenda per $\sqrt{5}$; quotiens erit $\sqrt{3}$. Nimirum dividendo 15 per 5 , & quoto 3 , signum radicale præfigendo. Cum enim, ex definitione divisionis, sit numerus dividens ad dividendum, ut unitas ad quotum; ergo per hanc prop. erit quadratum dividendi ad quadratum divi- dendi, ut quadratum unitatis ad quadratum quoti; hoc est, si pro quoto ponatur Q , erit $5. 15 :: 1. Qq$. Sed $5. 15 :: 1. 3$. Ergo $Qq = 3$, & $Q = \sqrt{3}$.

Fig. 32.

Cor. 2. Si recta linea AB secta sit utcumque in C ; rectan- gulum sub partibus AC , CB contentum, est medium propor- tionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum sub tota AB & una parte AC vel CB , est medium proportio- nale inter quadratum totius AB , & quadratum dictæ partis AC vel CB . Nam super diametro AB descripto semicirculo AFB , &

AFB, & erecta ad diametrum perpendiculari CF, si complea- (a) *Per cor.*
tur triangulum rectangulum AFB, liquet esse (a) $AC:CF::1.p.8.l.6.$
CF:CB. Ergo per hanc prop. erit $ACq:CFq::CFq:CBq$; *hoc* (b) *Per cor.*
est, (b) $ACq:ACB\ rectang::ACB\ rectang:CBq.$ 1.p.17.l.6.

Porro (c) $BA:AF::AF:AC.$ *Ergo* $BAq:AFq::AFq:$ (c) *Per cor.*
 $ACq.$ *Hoc est,* (d) $BAq:BAC\ rectang::BAC\ rectang:ACq.$ 2.p.8.l.6.
Eodem modo $ABq:ABC::ABC:BCq.$ (d) *Per 17.*
 l. 6.

PROPOSITIO XXIII.

Æ *Quiangula parallelogramma (X, Z) inter se* Fig. 58.
rationem habent compositam ex rationibus la- (quam qua-
terum (AC ad CB, & LC ad CF.) re ante fig.
 47.)

Hoc est, si fiat CB ad O, ut LC ad CF; X est ad Z. (e) *Per def.*
ut AC ad O. Vide quæ demonstravimus l. 5. parte 3. num. 5. l. 6.
 13. [*Vel respice sis ad instantias, quibus definitionem quintam*
hujus libri (quam ex Euclide restituimus) jam supra illustra-
vimus.

Ponantur AC, CB ita in directum, ut anguli aequales ACL,
BCF sint ad partes contrarias rectæ AB; (f) eruntque LC, CF (f) *Per 13.*
in directum.] & 14.l.1.

Concurrent IL, SB, in Q. Parallelogrammum X est (g) *Per 1.*
ad parallelogrammum R, ut AC ad CB: & R est ad Z, (h) *l. 6.*
ut LC ad CF, (hoc est, ut CB ad O.) Ergo (i) *ex æquo X* (h) *Per eand.*
est ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonstrandum. (i) *Per 22.*
 l. 5.

Corollaria.

H *Inc & ex 34. l. 1. patet primo, Triangula quæ unum* Fig. 58.
angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere
compositam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad (k) *Per 35,*
CF æqualem angulum continentium. 36. l. 1. &

Patet 2. Rectangula, ac proinde (k) *& parallelogramma* def. 3. l. 6.
quæcunque, rationem inter se habere compositam ex ratio- (l) *Per def.*
nibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem. Neque 3. l. 6. &
aliter de triangulis [rectangulis, & inde (l) *de triangulis pr. 37. 38.*
quibuscunque] ratiocinaberis. l. 1.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum Fig. 58.
proportio exhiberi possit. Sunt parallelogramma, X & Z,
& eorum bases AC, CB, altitudines CL, CF. Fiat (m) *Per 12.*
altitudo ad altitudinem CF ita basium altera CB ad O. Pa- l. 6.
rallelogrammum X est ad parallelogram. Z, ut AC est
ad O.

PRO.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 59.

IN omni parallelogrammo (SF), quæ circa (AB) diametrum sunt parallelogramma (CL , OI), & toti & inter se similia sunt, [& similiter posita; hoc est, latera homologa vel in eadem recta jacent, vel sunt sibi invicem parallela.]

Per 27. 1. æquales sunt anguli BCE , BSA , & BLE , BFA . Per eandem CEL est par CIF , hoc est per eandem ipsi SAF ; B vero & toti SF , & parti CL communis est. Igitur totum SF & pars CL æquiangula sunt. Reliquum est, ut etiam latera æqualibus angulis opposita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE , BSA , est CE parallela ad SA , erit (a) BC ad CE , ut BS ad SA ; & CE est ad EB , ut (b) SA ad AB . Quia vero in triangulis quoque ELB , AFB , EL est parallela ad AF , erit EB ad EL , ut (c) AB ad AF . Ergo ex æquo (d) CE est ad EL , ut SA ad AF . Igitur (e) CL & totum SF similia sunt. Eodem modo ostendatur (d) Per 22. OI esse simile toti SF . Ergo (f) CL & OI sunt etiam similia inter se. [Quoniam vero latera homologa vel in eadem recta jacent, ut BC & BS ; BL & BF ; vel sunt sibi invicem parallela, ut CE & SA ; EL & AF ; liquet parallelogramma (e) Per def. 1. l. 6. CL & SF esse similiter posita: & eodem modo constabit parallelogramma OI & SF , (ac proinde CL & OI) esse similiter posita.] Quæ erant demonstranda.

[Scholium. Huic propositioni problemata duo, quæ in conicis usui sunt futura, liceat adjungere. Prius ad ellipsim spectat, posterius ad hyperbolam.]

Fig. 60.

1. Datis tribus rectis A , B , C , quarum tertia C minor sit quam prima A , & constituto rectangulo $DEFK$ sub prima A vel DE , & secunda B vel EF ; ad secundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertia C æqualem, & deficiens rectangulo simili & similiter posito, ei quod sub prima & secunda constituitur.

Ducta rectanguli EK diametro DF , e latere DE prima A equali, abscindatur EG tertia C equalis; & per G ducatur GH lateri EF parallela, diametro occurrens in H ; & per H ducatur HI lateri DE parallela, ipsi EF occurrens in I . Dico factum: rectangulum enim $GEIH$ est id quod petebatur. Productis enim GH , IH , perficiantur rectangula IL , GM . Et

cuius

sum rectangula EK, IL circa eandem diametrum sint, (a) erunt (a) Per hanc similia & similiter posita. Constructo itaque rectangulo EK prop. sub datarum prima A & secunda B, sive sub DE & EF, ad secundam EF aliud rectangulum, nempe GI, applicatur, latitudinem habens GE tertia C aequalem, & deficiens rectangulo IL simili & similiter posito ipsi EK quod sub prima & secunda constituitur. Q. E. F.

2. Datis tribus rectis A, B, C, & constituto rectangulo Fig. 61. DEFK sub prima A vel DE, & secunda B vel EF; ad secundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertia C aequalem, & excedens rectangulo simili & similiter posito ei quod sub prima & secunda constituitur.

Ducta rectanguli EK diametro DF, producat DE ad G, ut sit adjecta EG tertia data C equalis, & per G ducatur GH lateri EF parallela, & occurrens diametro DF producta in H; compleaturque rectangulum EIGH. Dico factum. Productis enim HI, DK, KF, perficiantur rectangula GM, LI. Et cum rectangula EK, LI circa eandem diametrum sint, erunt (b) similia & similiter posita. Constructo itaque rectangulo EK sub datarum prima & secunda, DE, EF, ad secundam EF aliud rectangulum GI applicatur, latitudinem habens EG tertia C aequalem, & excedens rectangulo LI simili & similiter posito ipsi EK quod sub prima & secunda constituitur. Q. E. F.] (b) Per eand.

PROPOSITIO XXV.

Polygonum datum A in aliud dato B simile Fig. 62. transmutare.

Sive polygonum constituere aequale dato A, & simile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui simile petitur, fac rectangulum Q (c) æquale B. Deinde super FS fac (d) rectangulum R æquale A. Manifestum (e) est CF & FI esse in directum. Inter CF, FI inveni (f) mediam proportionalem FL. Super hac fac (g) polygonum simile dato B: erit hoc etiam æquale dato A. (c) Per 45. l. 1. (d) Per eand. (e) Per 14. l. 1. (f) Per 13. l. 6.

Nam cum per constr. sint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B est ad simile sibi polygonum super FL (g) Per 18. factum, (h) ut CF ad FI; hoc est (i) ut Q ad R. Igitur permutando, ut polygonum B est ad Q, ita polygonum super FL ad R. Sed per constr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum super FL, simile ipsi B, æquatur R, hoc est, per construct. dato A. Factum est igitur quod petebatur. (h) Per cor. 2. p. 20. l. 6. (i) Per 1. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 63.

Parallelogramma similia & similiter posita (BD , FN), habentia angulum communem (A), circa eandem diametrum existunt.

Duc rectas AE , CE . Si negas AEC esse diametrum communem parallelogrammorum BD & FN ; ipsius BD diameter esto recta alia AGC secans FE in G , & duc rectæ AF parallelam GH . Parallelogramma igitur FH , BD existent circa communem diametrum AGC , ac proinde

(a) Per 24. (a) erunt similia [& similiter posita.] Ergo ut BA ad AD ,
l. 6. (b) sic FA ad AH . Sed etiam ut BA ad AD , sic AF ad
(b) Per def. AN , cum BD , FN similia sint per hyp. Ergo FA est ad
1. l. 6. AH , ut FA ad AN . Quod est absurdum.

Fig. 59

[Cor. 1. Hinc motuum compositionem æstimare discimus. Impellatur eodem temporis momento, corpus ad A positum, vi AF secundum directionem rectæ AF , & vi AS secundum directionem rectæ AS , (ita nempe, ut corpus sola vi AF rectam AF , & sola vi AS rectam AS in dato tempore describeret;) & compleatur parallelogrammum $ASBF$: ex conjunctione virium, corpus A diagonalem AB eodem dato tempore describet. Idem enim erit motus corporis A , ac si, dum illud feratur in motu uniformi ab A ad S in recta AS , ipsa recta AS motu itidem uniformi, & situ sibiipsi semper parallelo, puncto suo A rectam AF eodem tempore describeret; nam eo pacto conservabuntur utraque motuum directiones versus plagas SB atque FB respectivæ. Unde fiet, ut dum corpus A aliqua quavis temporis dati parte, (v. gr. tertia) perveniens ad O , eandem (tertiam) partem rectæ AS describat; ipsa AS in situm IC transferetur, & ipsius punctum A eandem itidem (tertiam) partem rectæ AF eadem (tertia) dati

(c) Per 15. temporis parte describet; ita ut sit SA ad AF , (c) ut OA ad AI ;
l. 5. ac proinde ducta OL ipsi AF parallela, qua secet rectam IC

(d) Per def. in E , parallelogramma SE , OI erunt (d) similia, & similiter posita, & corpus A ex utroque motu, in fine ejusdem (tertiae) dati temporis partis, invenietur in puncto E . Et cum parallelogramma ista habeant etiam angulum communem A , per hanc prop. circa eandem diametrum AB existunt, & corpus ad E erit in ipsa diametro seu diagonali AB . Et eodem modo, corpus in quovis alio dati temporis momento reperietur alicubi in recta AB , & in fine temporis dati, in puncto B . Ergo describat ipsam diagonalem AB viribus conjunctis, eodem tempore quo vi AS rectam AS , vel vi AF rectam AF separatiim describeret.

Cor. 2.

Cor. 2. Describat igitur corpus quodvis in dato quovis tempore rectam DA vi insita ut DA : Idem corpus aequali tempore rectam AO recta DA aequalem, & secundum eandem directionem describeret, si nulla vi alia impediretur. Si itaque corpus ad A , a motu secundum AO deflectens, in eodem tempore rectam AE describat; tum ducta OE , compleatur parallelogrammum OI , & manifestum (a) est, corpus secundum rectam AE ferri, vi composita ex vi priori insita DA , vel AO , & ex nova vi AI ad punctum A corpori impressâ secundum directionem recta AI . (a) Per cor. 1. hujus.

Cor. 3. Hinc e converso, si corpus vi AB describat rectam AB , idem erit motus, ac si rectam eandem AB eodem tempore describeret vi composita ex viribus, quæ lateribus AF , AS parallelogrammi cujuscunque SE , cujus diameter sit recta AB , proportionales fuerint, & quæ etiam secundum latera ista AF , AS dirigantur.

Cor. 4. Hinc insuper cum Illustriss. Newtono colligimus a- Fig. 64. reas quas corpora quacunque in gyros acta circa immobile centrum virium describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales. Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam lineam AB . Idem corpus secunda temporis parte, si nihil impediret, recta ad x pergeret; describens lineam Bx æqualem ipsi AB , ita ut radiis ad centrum ductis confecta forent (b) æquales area ASB , BSx . Verum ubi corpus venit ad (b) Per 38. B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatque corpus a recta Bx deflectere, & in recta BC pergere: hoc est, si vis centripeta in eo loco sit ad vim insitam, ut By ad Bx , & perficiatur parallelogrammum $ByCx$; corpus lineam (c) diagonalem BC describet, & completa secunda temporis parte reperietur in C , in eodem plano cum triangulo primo SAB . (c) Per cor. 1. huj. prop. Funge SC . Area radio ad centrum ducto descripta, hoc est triangulum SBC (d) æquale erit triangulo SBx ; atque adeo (d) Per 37. (e) triangulo primo SAB . Simili argumento tertia temporis parte corpus a C ad d vi insita pertingeret, ita ut (e) Per axis. 1. l. 1. linea Cd æqualis esset lineæ CB : sed si vis centripeta, siue major priore siue minor, iterum agat ad punctum C , in fine tertii temporis reperietur corpus alicubi in linea Dd , lineæ SC parallela: ideoque ut prius, diagonalem CD describet: & radio DS ad centrum ducto, erit triangulum SDC in eodem plano cum quadrilatero $SABC$; & triangulo (f) SDC , atque (f) Per 37. adeo reliquis SCB , SAB inter se æqualibus, erit æquale. Pari modo si vis centripeta successive agat in D , E , F , faciens ut corpus singulis temporis partibus diagonales DE , EF , &c. describat; Erunt hæc in eodem plano, & triangula triangulis prioribus

oribus aequalia describentur. Aequalibus itaque temporibus aequales areae in plano immoto describuntur: atque adeo area-
rum summa quævis SADS, SAFS sunt inter se ut descriptio-
num tempora. Augeatur jam numerus, & minuatur latitu-
do triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter
ABCDEF, &c. erit linea curva, & areae hoc in casu in plano
immobili descriptæ, erunt etiamnum temporibus proportionales.
Q. E. D.

Fig. 64.

- Cor. 5. Hinc etiam, cum Cl. Newtono, colligimus corpora
omnia quæ in curva aliqua moventur, & areas circa centrum
aliquod S temporibus proportionales describunt, à vi centripeta
ad centrum illud tendente perpetuo urgeri. Cum enim corpus
vi insita aequales rectas AB, Bx aequalibus temporibus describe-
(a) Per 38. ret, ductis SA, SB, Sx, (a) æquabuntur triangula SBA, SBx. Cum
l. 1. vero corpus ex hypothesi aequales areas SAB, SCB aequalibus
temporibus describat, æquabuntur etiam triangula SBA, SBC.
Quare & triangula SBx, SBC aequalia erunt. Et quoniam
(b) Per 39. super eadem basi SB consistunt, puncta C & x (b) erunt in
l. 1. linea Cx basi parallela: atque adeo ductâ Cy rectâ xB pa-
rallelâ, erunt Bx, By parallelogrammi xy latera, & BC dia-
gonalis. Corpus itaque a rectâ ABx deflectens ad punctum
B, & diagonalem BC describens eodem tempore quo latus Bx
(c) Per cor. absque novâ vi ad B impressâ describeret, (c) urgetur etiam
a. huj. prop. in puncto B, vi By tendente ad S centrum virium. Atque
ita in punctis omnibus C, D, E, F, &c. Q. E. D.

Cor. 6. Cum itaque in Planetarum primariorum Systemate,
Areae radiis ad Solem ductis sint semper temporibus proportio-
nales, uti Astronomis est notissimum; Urgentur Planeta vi
perpetua ad Solem tendente. Neque aliter de secundariis circa
primarios suos est ratiocinandum.

Fig. 59.

- Cor. 7. Sit parallelogrammi BCEL diameter BE, & productis
CE, LE fiat parallelogrammum AOEL parallelogrammo BLEC
simile, similiterque positum, diametrum habens AE: dico quod
parallelogrammorum CL, OI diametri BE, AE in directum ja-
cent. Nam productis BC, AO, & BL, AI, perficiatur parallelo-
(d) Per hyp. grammum SF; & propter CE: EI:: (d) LE: EO, erit CI: IE:: (e)
(e) Per 18. LO: OE; & (f) alternatim, CI: LO:: IE: OE hoc (g) est, SA:
l. 5. AF:: OA: AI. Parallelogramma igitur SF, OI (h) similia, simi-
(f) Per 16. liter posita, & communem angulum ad A habentia, per hanc
l. 5. prop. circa eandem diametrum existunt. Atque eodem modo
(g) Per 34. demonstrabitur parallelogramma SF, CL circa eandem diame-
l. 1. trum existere. Liqueat igitur diametros AE, EB partes esse
(h) Per def. diametri AB, & proinde in directum jacere.
a. l. 6.

Cor. 8. Si duo triangula AOE, ECB, quæ latera duo AO,
OE duobus EC, CB proportionalia habent, (ut sit AO:OE::
EC:

EC:CB;) secundum unum angulum OEC ita componantur, ut latera homologa sint parallela, nempe AO ipsi EC, & OE ipsi CB; erunt reliqua latera AE, EB in directum. Productis enim OE, CE, ductisque ad illas parallelis AI, BL, perficiantur parallelogramma OI, CL; quae propter parallelas OA, CI, BL, & AI, OL, CB, erunt (a) equiangula, & similiter (a) Per. 17. posita; & propter AO:OE::EC:CB, erunt etiam similia (b), l. 1. ac proinde per cor. praecedens, eorum diagonales AE, EB in (b) Per def. 1. l. 6. directum jacent. Q. E. D.

Hoc autem corollarium propositionem 32. hujus l. 6. nobis exhibet; quam quoniam omiserat Tarquetus, ex hac prop. 26. me fiant corollario septimo deducendam censuimus.

PROPOSITIO XXVII.

OMnium parallelogrammorum (AD, AF) secundum eandem rectam (AB) applicatorum, & deficientium parallelogrammis (CE, IH) similibus & similiter positis, ei parallelogrammo (AD) quod super dimidia AB describitur; maximum est illud (AD) quod ad dimidiam applicatum est, simile existens defectui (CE.)

Applicentur ad rectam AB bisectam in C, parallelogrammum AC DL, & quodvis aliud AIFG, deficientia parallelogrammis CBED, & IBHF, similibus & similiter positis ipsi AD parallelogrammo quod a dimidia recta AB describitur: Dico parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus esse.

Hujus autem propositionis casus sunt duo: vel enim parallelogrammi AF basis AI est ipsa AC major, vel minor.

1. Sit primo major, ut in Fig. 65. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, similia & similiter posita sunt (c); circa diametrum eandem DFB (d) erunt; & producta IF ad K, erit CF ipsi FE (c) Per hyp. (c) Per 43. (c) aequale. Commune apponatur IH, eritque CH = IE. Sed propter AB bisectam in C, (f) erit GC = CH: Ergo & (f) Per 36. GC = IE. Commune adjiciatur CF, & erit AF = CF + IE. l. 1. Sed CE, (hoc est, (g) AD, propter aequales bases AC, CB) (g) Per eand. majus est quam CF + IE: AD igitur est ipso AF majus.

2. Deinde sit AI minor quam AC, ut in Fig. 66. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, similia sunt & similiter posita (h); circa eandem (h) Per hyp. diametrum

- (a) Per præc. diametrum (a) BDF erunt. Ducatur diameter, & describa-
 (b) Per 34. tur figura. Et propter æquales AC, CB, (b) æquabuntur LD',
 l. 1. DE: unde & parallelogramma GD, DH æqualia (c) erunt.
 (c) Per 36. Parallelogrammum igitur DH est parallelogrammo GK majus.
 l. 1. Sed DH (d) = DI: ergo DI majus est quam GK. Commune
 (d) Per 43. apponatur AK, & parallelogrammum AD parallelogrammo
 l. 1. AF majus erit.

Omnium itaque parallelogrammorum secundum eandem rectam applicatorum, & deficientium parallelogrammis similibus & similiter positis ei quod a dimidia describitur, maximum illud est quod ad dimidiam applicatur. Q. E. D.

Fig. 67.

- Cor. 1. Si ad eandem rectam AB applicentur parallelogramma AF, AΦ deficientia parallelogrammis IH in similibus & similiter positis ipsæ AD (vel CE) parallelogrammo quod a recta AB dimidia describitur, ita tamen ut sit summa rectarum $IB + IB = AB$, (hoc est, $AI = IB$, & $CI = CI$); Parallelogramma AF, AΦ erunt æqualia. Nam propter æquales AC, CB, &
 (e) Per 34. IC, CI, (e) æquantur etiam GN, NH, & ON, NF: & in
 l. 1. triangulo FOΦ, propter rectas ND, Dx lateribus ΦO, OF re-
 (f) Per 2. spectivæ parallelas, erit (f) etiam $FD = DΦ$, & $Ox = xΦ$.
 l. 6. Unde propter bases æquales, (g) erit $NL = NE$, & $Nx =$
 (g) Per 36. NK : ergo $OL (= FE = (h) FC) = (i) OC$, & $2OL$ sive
 l. 1. $Oy = 2OC$ sive OI . Commune apponatur AO, eritque AΦ
 (h) Per 43. = AF. Q. E. D.
 l. 1. Cor. 2. Si ad rectam AB applicentur parallelogramma
 (i) Per 36. æqualia AF, AΦ, deficientia parallelogrammis IH, in simi-
 l. 1. libus & similiter positis parallelogrammo AD (vel CE) quod
 super dimidia ipsius AB describitur, punctis I & i in recta
 (k) Per hyp. AB jacentibus; Erit $IB + IB = AB$, hoc est, $AI = IB$. Nam
 (l) Per 43. producta recta IK ad M, propter (k) $AΦ = AF$, ablato
 l. 1. communi AO, erit $GΦ = IF = (l) HM$. Ergo & GO (m)
 (m) Per 1. = FH, ac proinde (n) $AI = IB$.
 l. 6. (n) Per 34.
 l. 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 68.

- A**D-datam rectam (AB,) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AI) applicare, deficiens parallelogrammo (ON) quod simile sit alteri dato (D.) Oportet autem datum rectilineum (C) cui æquale applicandum est, non (o) majus esse parallelogrammo (AG) quod ad dimidiam datæ (AB) applicatur; similibus existenti-
 (o) Per præc. bus,

bus, & eo (AG) quod ad dimidiam applicatur, & (EF) defectu ejus, illi parallelogrammo (D) cui simile (ON) deficere debet.

Bifecetur AB in E; & super recta AE, (a) describatur, pa- (a) Per 18.
rallelogrammo dato D, simile parallelogrammum AG, & com- l. 6.
pleatur parallelogrammum AF. Erit quoque EF ipse AG, ac
proinde dato D simile. Erit etiam EF ipse AG similiter posi-
tum, & aequale. Et cum per determinationem, AG non sit
minus rectilineo C, erit vel ei aequale, vel eo majus. Si sit
AG = C, factum est quod petebatur: Ad datam enim rectam
AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum AG applicatur,
deficiens parallelogrammo EF, dato D simili.

Si vero parallelogrammum AG sit rectilineo C majus; (b) (b) Per cor.
inveniatur excessus ipsius AG vel EF, supra rectilineum C; & p. 45. l. 1.
illi excessui aequale, ipse vero EF simile & similiter positum
fiat (c) parallelogrammum KL, cum ipso EF communem angu- (c) Per 15.
lum habens G. Parallelogramma igitur EF, KL, circa eandem l. 6.
diametrum GIB (d) existunt. Producaturs KI ad M, N; & l. 6.
LI ad O; & erunt parallelogramma ON, EF, circa eandem (e) Per 24.
diametrum GB, & (e) proinde similia. Ergo (f) etiam ON l. 6.
simile est dato D. Et quoniam KL est excessus parallelo- (f) Per 21.
grammi EF supra datum rectilineum C; si itaque e parallelo- l. 6.
grammo EF auferatur KL, quod reliquum est aequale erit ipse
C; adeoque erit rectilineum C aequale parallelogrammis EN, IF
simul sumptis, hoc est, (propter EN (g) = AK, & (h) IF = (g) Per 30.
EI) aequale parallelogrammo AI. Ergo ad datam rectam AB, l. 1.
dato rectilineo C aequale parallelogrammum AI applicatur, de- (h) Per 43.
ficiens parallelogrammo ON, quod simile est dato D. Q. E. F. l. 1.

Scholium. Ex casu 2. & cor. 1. prop. preced. emergit alia Fig. 69.
methodus hoc problema construendi, si nempe, super data AB
constitutis ut prius AG, EF dato D similibus, producantur
ipsius EF latus EG & diameter BG, & circa hanc, in angulo
ipse EGF ad verticem opposito, fiat (i) parallelogrammum (i) Per 25.
SGTQ, aequale excessui ipsius AG vel EF supra rectilineum C, l. 6.
ipsique EGFB simile, similiterque positum. Unde ST erit simile, (k) Per axi.
similiter positum & (k) aequale ipse KL in constructione priori. l. 1.
Productis AH, BE, QS, QT, compleantur parallelogramma (l) Per 24.
A Q, PR: Erit (l) PR simile ipse EF, ac proinde dato D. l. 6.
Et propter ST, KL similia, similiter posita & aequalia, erit (m) Per 34.
SG = GL, hoc est, (m) PE = EO. Unde (n) AP = OB, & l. 1.
(o) A Q = AI = C. Ad datam igitur rectam AB, dato (n) Per axi.
rectilineo C aequale parallelogrammum A Q applicatur, defi- (o) Per cor.
ciens parallelogrammo PR, quod simile est dato D. 1. preced.

Cor. 1.

Fig. 70.

Cor. 1. Si parallelogrammum datum D quadratum sit; problema sic offeretur: Ad datam rectam AB , dato rectilineo C æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato. Et data recta applicabitur rectangulum AI deficiens quadrato ON , vel rectangulum AQ deficiens quadrato PR . Unde, cum per hujus prop. (vel scholii) constructionem, rectangulum AI una cum quadrato KL , (vel rectangulum AQ una cum quadrato ST) æquale sit quadrato AG vel EF ; patet prop. 5. lib. 2. ex hac prop. 28. l. 6. immediate deduci. Sic enim exprimitur prop. illa 5. l. 2. Si recta AB secta fuerit in partes æquales, AE , EB , & in partes inæquales AO , OB (vel AP , PB); Erit rectangulum AI (vel AQ) sub partibus inæqualibus, una cum KL (vel ST) quadrato partis intermediæ EO (vel EP) æquale quadrato dimidiæ AE vel EB . Qua nihil aliud est, quam prop. hujus 28. casus ille particularis, qui in hoc collario describitur.

Fig. 70.

+ vid. Enat.

Cor. 2. Data recta AB & rectilineo C , per hanc pr. 28. ejusque scholium, habebitur OB vel PB , latus quadrati quo deficit rectangulum AI vel AQ ad datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita OB ponatur Y ; unde $AN = AB \times Y$, & $ON = Yq$; ergo $AI (= AN - ON) = AB \times Y - Yq = C$. Atque idem omnino colligitur si ponatur $Y = PB$: erit enim $AQ = AR - PR = AB \times Y - Yq = C$. Atque hac est prima

(a) Vide
Oughtredi
Clav. Ma-
thematica,
cap. 16. n.
9.

(a) æquationum affectarum quadraticarum species sive forma, quam ex hac prop. 28 solverunt Geometre veteres, inveniundo quantitatem incognitam OB vel PB , per applicationem rectanguli dato C equalis, ad datam rectam AB , & deficientis quadrato. Manifestum autem est, primam hanc formam, duplicem solutionem admittere: Y enim vel per OB vel per PB explicari potest; quarum illa (OB) per propositionis, hac (PB) per scholii constructionem invenietur. Patet etiam ex cor. 2. pr. 27. duas illas quantitates simul sumptas ($OB + PB$) data recta AB æquales esse; unde ut utraque inveniat, duplici constructione opus non est: inventa enim una quavis OB , altera AO vel PB simul innotescit.

Fig. 70.

Cor. 3. Ipsa etiam regula, qua ad hujus forma æquationes solvendum utuntur recentiores, ex hujus prop. 28. constructione deducitur. Cum enim Y sit vel ($PB =$) AO , vel OB , sitque $AO = \frac{1}{2} AB + EO$, & $OB = \frac{1}{2} AB - EO$: Et cum sit

(b) Per cor. $EO = KI$; & per constr. pr. 28. $KIq = EBq - C = (b)$
3. p. 4. l. 2. $\frac{1}{4} ABq - C$, erit KI vel $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. Ergo Y erit

$$\text{vel} \quad AO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C},$$

$$\text{vel} \quad OB = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}.$$

Atqui,

Atqui, pro equatione $AB \times Y - Yq = C$, regula est $\frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C} = Y$. Vide Oughtredum loco supra citato.

Cor. 4. Hinc in equatione $AB \times Y - Yq = C$, data recta Fig. 71. AB & rectilineo C , expeditius invenietur Y , si rectilineo C aequale (a) quadratum construat, cujus latus ex illa construtione inventum sit V , cui ex E medio puncto data recta AB , l. 2. perpendiculum aequale EX erigatur: tum centro X , radio $XO = \frac{1}{2} AB$ arcum circuli describe, secantem AB in O : recta AO , OB erunt valores ipsius Y : Nam $Y = (b) \frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. [b] Per cor. 3. hujus. Sed per constr. est $XOq = \frac{1}{4} ABq$, & $XEq = C$. Ergo EOq five (c) $XOq - XEq = \frac{1}{4} ABq - C$. Ergo $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, & $AO = \frac{1}{2} AB \pm EO = \frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$; l. 1. sicut & $OB = \frac{1}{2} AB - EO = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. (c) Per 47.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB) dato rectilineo (C) Fig. 72. æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (ML) quod simile sit alteri dato (D .)

Bisecetur AB in E , & super recta EB (d) describatur parallelogrammo dato D simile parallelogrammum $BEFG$; atque l. 6. ipsis C , EG simul sumptis aequale, ipsi vero $FEBG$ simile, (e) Per 25. similiterque positum fiat (e) parallelogrammum $FKIH$ commune cum illo habens angulum ad F . Erunt (f) igitur parallelogramma EG , HK circa eandem diametrum FBI . Producantur AB , GB , ad L , M ; Et cum simile sit EG ipsi D per constructionem, atque (g) ipsi ML quia circa eandem diametrum sunt EG , (g) Per 24. ML ; inde colligitur (h) ML ipsi D simile esse. Producta MK , l. 6. compleatur parallelogrammum AM ; eritque $AK = (i) KB = (h) Per 21. (k) BH$. Quare si equalibus AK , BH commune adjiciatur KL ; l. 6. erit AI parallelogrammum aequale parallelogrammis KL , BH (i) Per 36. simul sumptis. Parallelogrammum autem KH (hoc est, $EG + KL + BH$) aequale est ipsis $EG + C$ per constructionem: adeoque sublato communi EG , erit $C = KL + BH = AI$. Ad datam igitur rectam AB , dato rectilineo C aequale parallelogrammum AI applicatur, excedens parallelogrammo ML , quod dato D simile est. Q. E. F. (k) Per 43. l. 1.

Fig. 73.

Cor. 1. Si parallelogrammum D sit quadratum, problema postulat ut Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. Et cum per constructionem, rectangulum AI una cum quadrato EG æquale sit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediate deduci posse: nempe, Si recta AB bisecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum sub tota composita AL & adjecta BL sive LI, una cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compositæ ex dimidia & adjecta. Nihil enim aliud est hac prop. 6. l. 2. quam propositionis 29. l. 6. casus ille particularis, qui in hoc corollario describitur.

Fig. 73.

Cor. 2. Data recta AB & rectilineo C, per hanc prop. invenerunt veteres Geometra latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: qua latera apud recentiores Analystas, (a) per æquationum quadraticarum affectarum secunda ac tertia speciei resolutionem inveniuntur. Etenim si pro latere LI ponatur E, erit $ML = Eq$, & $AM = E \times AB$; ergo AI sive $C = Eq + E \times AB$; qua est tertia æquationum quadraticarum species, in qua per hanc prop. invenitur E sive BL vel LI, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI sive E, simul habetur latus alterum $AL = AB + E$, quod inveniunt recentiores, per resolutionem æquationis quadratica secunda speciei.

(a) Vide
Oughtredi
Clav. cap.
16. n. 9.

Fig. 73.

Cor. 3. Hac etiam secunda æquationum affectarum quadraticarum species, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI (rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, sic construi potest. Describatur (b) recta AL sive IP quadratum IPQR, cujus pars sit rectangulum AI. Et quoniam $AL = IR$, & BL (c) Per axio. = LI, erit (c) $LR = AB$. Jam si pro AL ponatur A, erit $PR = Aq$, & $AR = A \times AB$; unde AI sive $C = (PR - AR) = Aq - A \times AB$; qua est æquationum quadraticarum secunda species, per hoc corollarium construenda.

(b) Per 46.
l. 1.
(c) Per axio.
3. l. 1.

(d) Vide
Oughtredum
loco citato.

Cor. 4. Recentiorum (d) etiam regula, (sc. $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB = A$, & $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$), quarum ope, ex æquatione $Aq - A \times AB = C$, invenitur A, & ex æquatione $Eq + E \times AB = C$, invenitur E, Ex hujus prop. constructione deduci possunt. Cum enim sit (e) Per cor. $EB = \frac{1}{2} AB$, erit $EG = (e) \frac{1}{4} ABq$: Et per constr. hujus, $KH = EG + C = \frac{1}{4} ABq + C$, cujus itaque latus KI sive $EL = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, cui si AE vel $\frac{1}{2} AB$ adjiciatur, erit AL sive

A =

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB. \text{ Porro, si ab } EL = \\ \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} \text{ auferatur EB, sive } \frac{1}{2} AB, \text{ relinquetur BL sive E} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB. \end{aligned}$$

Cor. 5. Ex his autem regulis, in utralibet aequatione, sive Fig. 74.
 $Aq - A \times AB = C$, seu $Eq + E \times AB = C$, data recta
 AB , & rectilineo C , expeditius inveniuntur A & E , si recti-
 lineo C aequale quadratum (a) construatur, cujus latus inde (a) Per 14.
 inventum sit N , cui ex E medio puncto rectae datae AB , aqua-
 le perpendiculum EO erigatur, & jungatur OB , cui aequalis (b) Per con-
 in EB producta, capiatur EL , eritque $AL = A$, & $BL = E$. (b) Per con-
 cum enim sit $EOq = (b) C$, erit $EBq + EOq = \frac{1}{4} ABq + C$ (c) Per 47.
 $= (c) OBq = ELq$. Ergo $EL = (d) \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, & AL (d) Per axio.
 $= (e) \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} = A$; atque $BL = (f)$ (e) Per axio.
 $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$.] (f) Per ax. 3.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam (AB) ita secare, ut tota (AB) Fig. 75.
 sit ad unum segmentum (AC) sicut idem
 segmentum est ad reliquum (CB .)

Hoc est, (ut loquuntur Geometrae,) lineam extrema ac
 media ratione secare.

[Super data recta AB fiat quadratum $AFSB$, & ad Fig. 21. l. 2.
 rectam FA , quadrato FB aequale (g) applicetur rectangulum (g) Per 29.
 $FOLI$, excedens figurâ AL ipsi FB simili. AL itaque qua-
 dratum est. Et quoniam FL aequale est ipsi FB ; ablato (h) Per 14.
 communi FC , erit $AL = OB$. Et propter angulos rectos, ac
 proinde aequales, OCB , ACL , (h) erit $OC : CL :: AC : CB$. Sed (i) Per 34.
 $OC = (i) AF = AB$, & $CL = AC$; Ergo $AB : AC :: AC : CB$.
 Factum est igitur quod petebatur.

Aliter.] Per 11. 2. ita seca AB in C , ut rectangulum sub Fig. 75. l. 6.
 AB, CB , sit æquale quadrato AC . Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC , sic AC ad CB .

Hujus sectionis vis admirabilis est in corporum regulari-
 um inscriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 76.

SI a lateribus trianguli rectanguli (ACB) figurae similes quacunque describantur, erit (F) ea qua opponitur recto angulo, duabus simul reliquis (L, R) æqualis.

Propositio igitur 47. l. 1. hic redditur universalis.

Ab angulo recto C dimittatur perpendicularis CO . Quoniam AB, BC, BO sunt (a) tres proportionales, erit F ad fibi similem R , (b) ut AB prima ad BO tertiam. Rursum quoniam (c) BA, AC, AO sunt proportionales, erit F ad fibi similem L , ut (d) BA prima ad AO tertiam. Quia igitur est F ad R , ut AB ad BO , & F ad L , ut AB ad AO , erit quoque F ad R & L simul sumptas, ut (e) AB ad BO, AO simul sumptas. Sed AB duabus BO, AO æqualis est. Ergo etiam F duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

EX hac propositione facile dabitur quocunque figuris similibus rectilineis quibuscunque una omnibus æqualis & similis, eadem prorsus methodo, qua probl. 1. scholii post 47. l. 1. exhibetur datis quolibet quadratis unum æquale. In demonstratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6. [Et pari ratione, per prob. 2. scholii ejusdem, dabitur figurarum similium differentia similis: hoc est, non tantum addi possunt, verum etiam subtrahi figurae quævis similes, minor a majore, eadem methodo qua quadrata adduntur vel subtrahuntur in scholio citato.]

PROPOSITIO XXXII.

VIX habet usum, nec quidquam habet notabile. [Est autem cor. 8. p. 26. prius, nequis eam desideret.]

PROPOSITIO XXXIII.

IN aequalibus circulis vel eodem, anguli sive ad Fig. 77. centra (ut ABC , FOD) sive ad peripheriam (ut ARC , FSD) eam inter se rationem habent, quam arcus (AKC , FGD) quibus insistant. Idem intellige de sectoribus.

Quod attinet ad angulos centri & sectores, demonstrabitur eodem prorsus modo, quo propositione 1. hujus libri demonstratum est triangula æque alta esse ut bases. Tantum ubi istuc citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29. lib. 3. [Item pro E isthic, vertice trianguli DEF , hic ponitur O vertex anguli & sectoris DOF ; pro triangulis vero isthic, substitue hic angulos ad centra B , O , itemque sectores; & pro basibus arcus.

Quoties enim pars quævis aliquota ex. gr. pars tertia DG , arcus DF , continetur in arcu AC ; toties eadem pars aliquota DOG , anguli DOF , continebitur in angulo ABC . Et manifestum est quamlibet aliam partem aliquotam arcus DF & anguli DOF , in arcu AC & angulo ABC , æquali semper numero respective contineri. Ergo, per rationum æqualium indicium illud Tacquetianum, pag. 122, 123. erit angulus ABC ad angulum DOF , ut arcus AC ad arcum DF : Et eodem prorsus modo probabitur sectorem ABC esse ad sectorem DOF , ut arcus AC est ad arcum DF .]

Quoniam vero ad peripheriam anguli R & S dimidii (a)(a) Per 10. sunt angulorum ad centrum ABC , FOD , quod de his o. l. 3. stensum est, liquebit etiam de illis.

Corollaria.

1. **A**ngulus centri (BAC) est ad quatuor rectos, ut arcus Fig. 78. BC cui insistit, ad totam circumferentiam.

Nam [cum quatuor rectos, hoc est, (b)omnes angulos circa (b) Per cor. centrum A constitutos, metiatur tota circuli circumferentia, 3. pr. 13. l. unum igitur angulum rectum BAF metietur totius circumfe. 1. cum sch. rentia quadrans BF . Sed] ut [angulus] BAC est ad rectum p. 23. l. 1. BAF , ita per hanc 33. arcus BC est ad quadrantem BF . Ergo (c) angulus BAC est ad 4. rectos, ut arcus BC est ad 4. (c) Per 14. l. 5. quadrantes, hoc est ad totam peripheriam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL , BC , qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra ut IAL , & BAC , sive ad peripheriam, sunt similes. [Et conversim.]

Nam [primo, ponantur anguli aequales ad centra; &] arcus
 (a) Per cor. 1. IL est ad suam peripheriam, (a) ut angulus IAL, hoc est
 ut BAC, ad 4. rectos; & arcus BC est ad suam peripheriam, (b) ut idem angulus BAC ad 4. rectos. Ergo IL (c)
 (b) Per idem cor. est ad suam peripheriam, ut BC ad suam. Ergo (d) sunt
 (c) Per 11. l. 5. similes arcus IL & BC.

(d) Per def. 4. l. 6. [Si vero anguli aequales O, K fuerint ad circumferentias; fiant super iisdem arcibus anguli ad centra IAL, BAC, (e) e-
 (e) Per 20. l. 3. & axio. BC similes erunt.] runtque hi etiam aequales: unde per primam partem arcus IL,

6. l. 1.

Et e converso, inaequalium circulorum similes arcus BC, IL subtendunt angulos aequales, siue anguli isti sint ad centrum seu ad circumferentiam, uti ex ipsa figura & prop. 20. l. 3. satis patet.]

3. Duæ semidiametri (AB, AC) a concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL, BC. Patet ex coroll. 2.

4. [Ductis rectis BC, IL,] Segmenta (BKC, IOL) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) similia sunt. [Et conversim.]

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam arcus BKC, IOL similes sunt. [Ergo (f) & segmenta BKC, IOL
 (f) Per def. 4. l. 6. similia sunt.]

Item segmenta opposita similia sunt, propter arcus BC, IL similes.

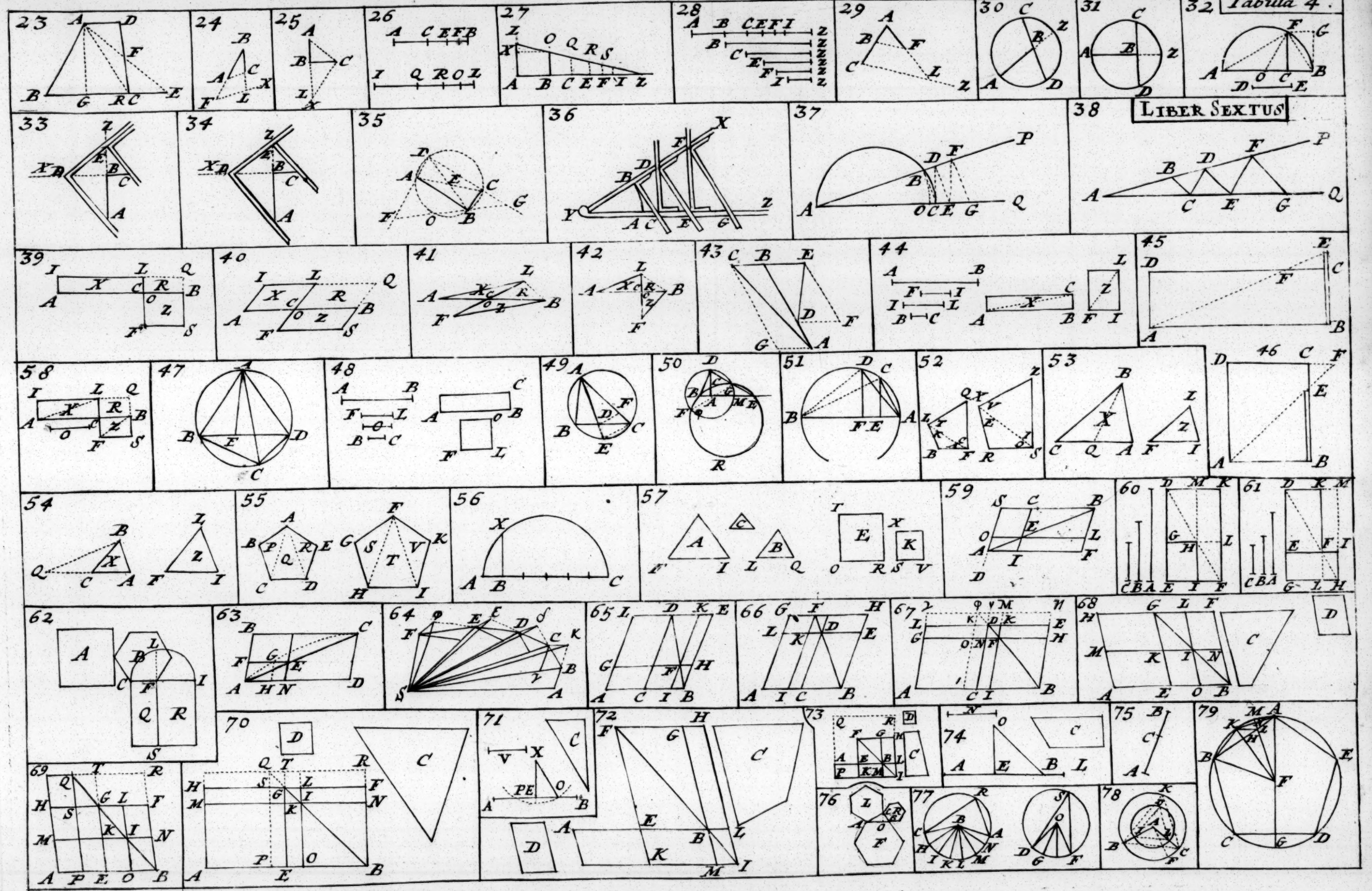
Et e converso, segmenta similia BKC, IOL capiunt angulos
 (g) Per def. 4. l. 6. aequales K, O. Nam (g) propter similes arcus BKC, IOL, arcus oppositi BC, IL similes erunt, & anguli K, O, super ipsis
 (h) Per cor. 20. huius. (h) aequales.

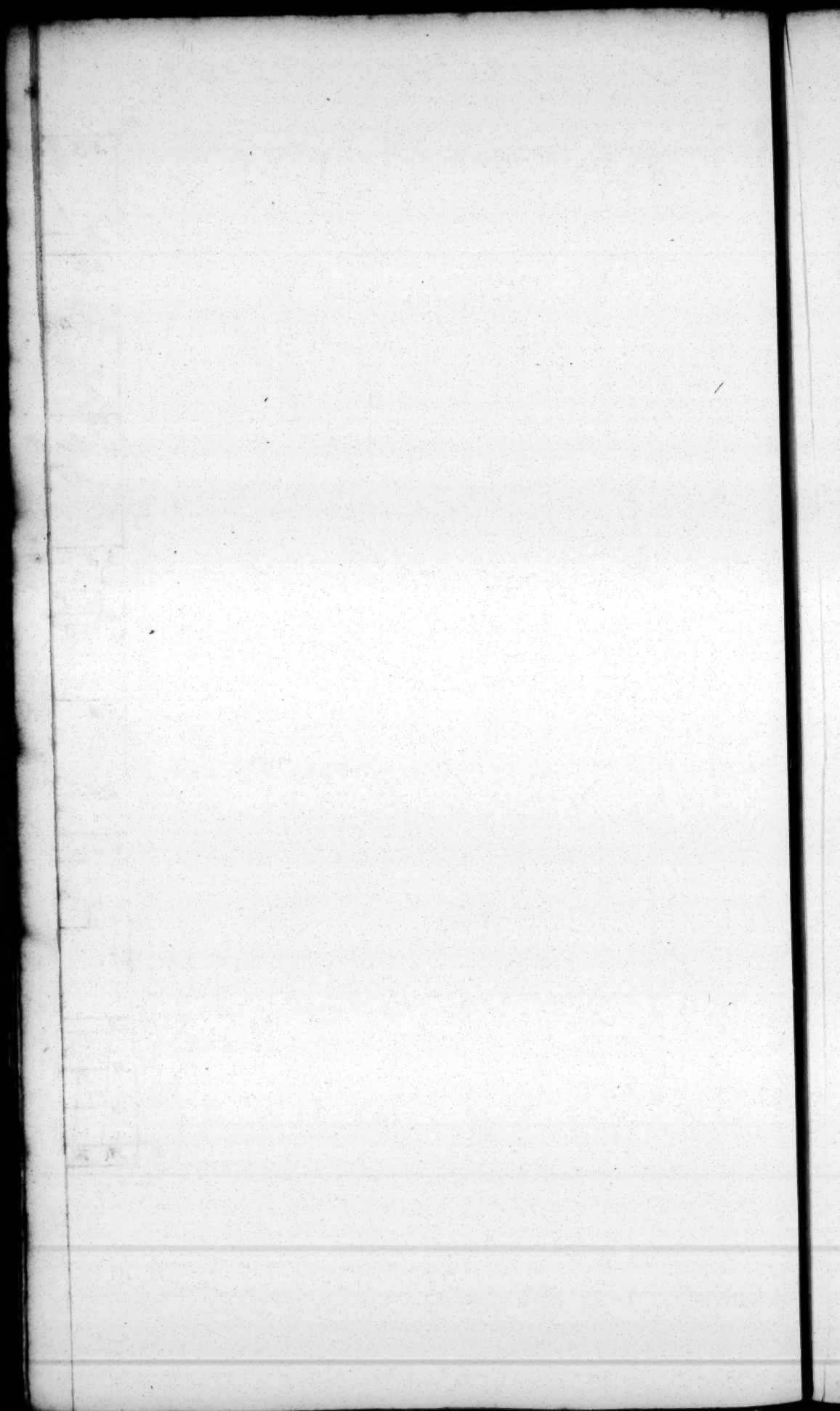
Item, anguli in segmentis BC, IL sunt equalium angulorum K, O (i) complementa ad duos rectos, atque inde aequales
 (i) Per 22. l. 30. erunt.]

5. Similia segmenta super eadem recta, vel equali, sunt aequalia. Patet ex cor. preced. & schol. p. 21. l. 3. & axio. 7. l. 1. Continet autem hoc corollarium propositiones 23. & 24. l. 3. a Tacqueto omiffas. Prop. enim 23. ita effertur: Super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia & inæqualia, ex eadem parte non constituentur. Et prop. 24. ita: Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

6. Ex hac etiam prop. ejusque corollariis deducitur angulorum conficiendorum & mensurandorum praxis facillima, prout in scholio post prop. 23. lib. 1. latius explicatur.

Scholium.





Scholium. Postulat hic locus, ut fidem libro quarto præstam Fig. 79. jam liberem, Elementi 13. propositionem 10. demonstrando, quæ ita se habet: Quadratum lateris AB pentagoni ordinati ABCDE circulo inscripti, æquatur quadratis e latere hexagoni & e latere decagoni eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. Ducta enim diametro AG, & radio FB; a centro F lateri AB perpendicularis demittatur FH, quæ producta circulo occurrat in K: Illa arcum AKB, (hoc est (a) quintam (a) Per 25. partem totius circumferentiæ) bifariam dividet (b) in K. Jungel. 3. BK, KA; & cum sit arcus AK pars decima totius circumferentiæ, erit AK recta, (c) latus decagoni ordinati huic circulo inscripti. A centro F, ipsi AK perpendicularis demittatur FN, quæ producta circulo occurrat in M; hæc arcum AMK bifariam dividet in M, & latus pentagoni BA secabit in L. Junge KL. Ob semiperipherias ABG, AEG æquales, & arcus ABC, AED æquales; erit arcus CG ipsius CGD, vel AKB dimidius: unde arc. CG = arc. AK = 2 arc. KM. Item, arc. CB = arc. AB = 2 arc. BK. Ergo arc. CG + arc. CB = 2 arc. MK + 2 arc. KB, hoc est, arc. BCG = 2 arc. BKM, & ang. BFG = (d) 2 ang. BFM. Sed in triangulo ABF, ang. externus BFG = (c) ABF + BAF, hoc est, (ob æquales AF, BF) (f) = 2 ang. ABF = 2 ang. BAF = (prius) 2 ang. BFM vel LFB. In triangulis igitur LFB, FAB, ob angulos BFL, BAF æquales, & angulum ad B communem, (g) etiam ang. BLF = ang. BFA, & (h) AB:BF::FB:BL. Unde (i) rect. ABL = BFq. Porro, in triangulis ALN, KLN, ob angulos ad N rectos, & latera AN, NK æqualia, & LN commune, (l) erit AL = LK, & ang. LAK = ang. AKL. Sed & ang. KBA = (m) ang. KAB vel LAK sive AKL: ergo in triangulis BAK, KAL, propter angulum ad A communem, & angulos ABK, AKL æquales, erit ang. AKB = (n) ang. ALK, & triangu- (l) Per 4. la BAK, KAL erunt similia: unde BA:AK::KA:AL; & rect. BAL = AKq. Sed rect. ABL + rect. BAL = (o) ABq. Ergo ABq = BFq + AKq. Sed BF est circuli radius, & proinde (p) latus hexagoni ordinati circulo inscripti; & AK est latus decagoni ordinati eidem circulo inscripti. Ergo quadratum ex latere pentagoni ordinati æquatur quadratis e latere hexagoni ordinati & e latere decagoni ordinati, eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. 2. E. D.]

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS.

NOBIS SEPTIMUS.

SEX libris primis subjungit Euclides elementa numerorum tribus sequentibus septimo, octavo & nono comprehensa, quibus etiam decimum de quantitativibus incommensurabilibus adjungit. Nos a planis immediate transimus ad solida. De numeris seorsim tractaturi. Id, opinor, discantibus commodius erit, si elementa Geometriæ nulla alia tractatione interrupta, simul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propositiones hujus & sequentis libri, eos non septimum & octavum, sed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, si ab ordine Euclideo ubique recepto discedamus, propositionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est, corporum doctrina universa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

Prima solidorum Principia Undecimus hicce Elementorum Liber proponit. Neque sane Corporum proprietates sine eo cognosci queunt: & si Mathematicum partes plerasque omnes sine solidorum scientia aggrediamur, frustra erimus. Doctrina enim Theodosii Sphærica, Trigonometria etiam Sphærica, pars magna Geometria Practica, Statica, atque Geographia eidem innituntur; & quæ occurrunt paulo difficiliora in Gnomonica, Sectionibus Conicis, Astronomia, Perspectiva, atque Optica universa, intellectis rite Solidorum principiis, faciliora redduntur. Adeo ut qui Geometria Elementa, omissis fere & posthabitis hoc & sequenti libro, tradiderunt, eadem manca admodum, atque plane imperfecta tradidisse sint censendi.

DEFI-

DEFINITIONES.

1. **S**olidum five corpus est, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.
2. Solidi extremum est superficies.
3. Linea recta (AB) est ad planum (CC) recta five perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (CA) in plano (CC) ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.) Fig. 1. l. 11.
4. Planum ad planum rectum five perpendiculare est, Fig. 2. cum omnes rectæ lineæ (LQ) quæ communi planorum sectioni (XR) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ sunt alteri plano (ABCO.)
5. Si recta linea (OL) plano insistant non ad rectos angulos, & a sublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP, jungaturque PO; angulus LOP dicitur inclinatio lineæ OL ad planum. Fig. 3.
6. Si planum (RE) plano (LQ) non insistant perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio est acutus angulus (ABC) qui continetur a rectis lineis (AB & BC) quæ in utroque plano ad communem sectionem (OE) ducuntur perpendiculares. Fig. 4.
7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli sunt æquales.
[Et eodem modo, recta linea ad planum similiter inclinatur, ac alia recta ad idem vel aliud planum, si inclinationum anguli def. quinta descripti, fuerint æquales.]
8. Parallela plana sunt, quæ in omnem partem producta, æqualibus semper intervallis distant.
9. Similes figuræ solidæ rectilineæ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.
10. Angulus solidus rectilineus est, qui pluribus quam Fig. 5. duobus planis angulis (BAC, GAO, OAB) non in eodem existentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.
11. Æquales solidi anguli sunt, qui intra invicem positi congruunt.
- Quemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita solidus angulus est inclinatio superficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Consule scholium post prop. 16. l. 3.
12. Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum adversa duo (OFE, ACB) sunt parallela, æqualia & similia. Fig. 6, 7, 8.
13. Paralle-

Fig. 8.

13. Parallelepipedum est solidum ex quadrilateris ex adverso parallelis comprehensum.

14. Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, solidum iis comprehensum cubus erit.

[15. *Æquales & similes solida figura sunt, qua similibus planis multitudine & magnitudine aequalibus continentur.*

Hanc definitionem (Euclidi decimam) perperam omittit noster; atque inde propositionum 25. & 28. demonstrationes Tacquetiana videntur esse minus accurata.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 9.

Recta linea pars una (AC) nequit esse in sub-
jecto plano (OE), altera (CB) extra planum.

Per se clarum est ex definitione plani & lineæ rectæ. Vide defin. 7. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Fig. 10.

Omne triangulum in uno est plano. Et dua rectæ
se mutuo secantes in eodem plano sunt.

Prima pars per se clara est, cum triangulum nihil sit aliud quam plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam [*& ex prop. præced.*] patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Fig. 11.

Si duo plana (AB , CD) se mutuo secant; (EF)
communis eorum sectio est recta linea.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen sic demonstrare. Si EF sectio communis non est recta linea; ducatur in plano CD recta EOF , & in plano AB recta EQF . Dux igitur rectæ EOF , EQF claudent spatium. Quod est absurdum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI recta (BA) duabus rectis (CAX, FAS) se mutuo secantibus perpendicularis existat; etiam plano per ipsas ducto perpendicularis erit. Fig. 12.

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF sit perpendicularis. Junge AQ, & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hæc producta, necessario secabit aliquam rectarum CAX, FAS, vel utramque, ubicunque tandem fuerit punctum Q. [Si enim recta QO, rectarum alterutri FAS parallela sit; QO secabit (a) alteram CAX: si vero neutri illarum sit parallela, secabit (b) utramque.] Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus est;

erit quad. BO æ. quad. BA }
quad. AO. }

Sed quia BQ ponitur recta plano FAC, ac proinde rectum facit cum AQ angulum BQA; est

quad. BA (e) æ. quad. BQ }
quad. AQ. }

Et quia angulus AQO per const. rectus est;

quad. AO æ. quad. OQ }
quad. AQ. }

Ergo quad. BO æ. quad. BQ }
quad. OQ }
quad. AQ bis. }

Ergo quad. BO majus est [quadratis] BQ & OQ; ac proinde (g) angulus BQO rectus non est. Ergo BQ non est recta (h) plano CAF. Liquet ergo quæsitum.

Scholium.

EX eo quod ponebatur BQ esse recta plano FAC; directe est demonstratum BQ non esse rectam plano FAC: ac proinde ex eo quod negaretur assertio theorematis, eadem assertio directe probata est. Hæc demonstratio quoad substantiam est Joannis Ciermans.

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 13.

SI tres rectæ (BA , CA , FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) sint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano.

Sit enim, si fieri potest, earum una BA in alio plano RO , quod secet LQ planum duarum reliquarum CA , FA , recta AO . Quoniam RA per hyp. perpendiculariter insistit duabus CA , FA , plano LQ recta (a) erit. Ergo cum AO rectum facit (b) angulum RAO . Sed etiam ex hyp. angulus RAB rectus est. Ergo anguli RAB & RAO æquales sunt. Quod est absurdum.

(a) Per prac.
(b) Per def.
3. l. 11.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14.

Linea rectæ (AB , CD) quæ eidem plano (EF) sunt perpendiculares, inter se sunt parallela.

Postulari poterat ut per se notum; licebit tamen sic demonstrare.

(c) Per constr. Juncta BD , fac in plano FE , lineam DG normalem ad BD & parem BA , junganturque DA , GA , GB . Rectæ BD , DG æquantur BD , (c) BA ; & anguli BDG , (d) DBA sunt recti. Ergo AD , BG (e) sunt æquales. Igitur triangu-
(f) Per 8. gula ABG , GDA sibi mutuo æquilatera sunt, ac proinde anguli ABG , ADG (f) æquales. Sed ABG (g) rectus est.
(g) Per def. Quare & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex constr. & CDG per definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD , AD , BD , recta est. Ergo CD cum AD , BD est in uno (h) plano.
(h) Per prac. Sed etiam AB cum AD , BD (i) in uno plano est. Ergo
(k) Per def. AB , CD sunt in uno plano. Ergo cum anguli ABD , CDB sint (k) recti, erunt AB , CD (l) parallelæ. Quod erat de-
(l) Per 29. monstrandum.
l. 1. & defin.
36. l. 1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15.

Recta (EF) secans rectas (AB , CD) positæ in eodem plano, in uno est cum ipsis plano.

Postulari poterat. Qui völet sic demonsträt.

[Si recta EF non est in plano rectarum AB, CD; per (a) Per puncta E, F in illo plano (a) ducatur recta EGF. Dux igitur recta EF, EGF spatium includunt; quod est (b) absurdum. (b) Per axioma. 13.

Aliter.] Planum rectarum AB, CD secet aliud planum per puncta E, F. Si jam EF non est in plano AB, CD, non erit EF communis sectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF (c) Per 3. est linea recta. Dux igitur rectæ EF, EGF concludunt spatium. Quod absurdum. l. 11.

Corollarium.

Hinc sequitur, si EF secat parallelas AB, CD, in eodem esse cum ipsis plano; omnes enim parallelæ, [hoc est, (d) Per def. 36. l. 1. dua quævis] (d) sunt in uno plano.

PROPOSITIO VIII.

SI parallelarum (AB, CD) una (AB) plano Fig. 14. (EF) sit recta; etiam altera (CD) eidem plano erit recta.

Poterat postulari. Si demonstratio quæritur, fere similis ea est demonstrationi propositionis 6.

[Ductis BD, AD, in plano EF fac GD normalem ad BD, (e) Per 4. & parem ipsi BA; junctisque GA, GB, ostendetur ut in demonstr. prop. 6. rectam GD etiam ad AD normalem esse. Ergo GD (e) recta erit plano ABD, hoc (f) est, plano CDBA. (f) Per cor. 3. l. 11. Quare angulus CDG (g) rectus est. Sed angulus CDB est etiam rectus, (utpote cum angulo ABD recto, duos rectos (h) Per 27. conficiens.) Ergo CD (i) perpendicularis est plano GDB, seu EF. (i) Per 4. Quod erat demonstrandum.] l. 11.

PROPOSITIO IX.

Rectæ (AB, EF) quæ sunt eidem rectæ (CD) Fig. 16. parallele, licet non in eodem cum illa plano, etiam sunt inter se parallele.

Quamvis postulari posset, licebit tamen sic demonstrare.

In plano parallelarum AB, CD, duc GK normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD, duc HK normalem ad CD, [& junge GH.] Ergo (k) CK recta est plano GKH. (k) Per 4. l. 11.

- (a) Per 8. l. GKH. Ergo cum AG, EH sint parallelæ ad CK, erunt AG, EH (a) rectæ plano GKH. Ergo AG, EH (b) sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.
 l. II.

PROPOSITIO X.

Fig. 17. **S**I due rectæ (AC, BC) sint parallelæ duabus rectis DF, EF, licet non sint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt.

- Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cum AC, FD sint parallelæ & æquales, etiam AD, CF (c) parallelæ sunt & æquales. Similiter ostendam BE, CF esse parallelas & æquales. Ergo etiam AD, BE sunt (d) parallelæ & (e) æquales. Æquantur (f) ergo AB, DE. Cum igitur triangula BAC, EDF sibi mutuo sint æquilatera, anguli C & F (g) æquales erunt. Quod erat demonstrandum.
 (a) Per 33. l. I.
 (d) Per prac.
 (e) Per axio. I.
 (f) Per 33. l. I.
 (g) Per 8. l. I.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18. **A**D planum [infinitum] datum (AB,) a dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.

- (h) Per 12. Constr. In plano AB duc [infinitam] quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem (h) describe CE. Ad eandem
 l. I.
 (i) Per 11. per E, in plano AB, perpendicularem (i) duc AEM. Tum ad AM ex C perpendicularem (k) demitte CG. Dico CG
 l. I.
 (k) Per 12. plano AB rectam esse.
 l. I.
 Per G ponatur HG parallela ad DF.
 (l) Per 4. l. I. Per const. DE recta est ad CE & EM. Ergo DE recta (l) est plano CEM: adeoque & (m) HG. Ergo (n) CG
 l. I.
 (m) Per 3. recta est ad HG. Sed & CG ex const. recta est ad EM.
 l. II.
 Ergo CG (o) recta est plano AB. Quod erat propositum.
 (n) Per def. [Corollarium. Perpendicularis CG a puncto C ad planum
 3. l. II. AB ducta, brevissima est omnium rectarum que ab illo puncto
 (o) Per 4. ad planum duci possunt. Ducatur enim ab eodem puncto ad
 l. II. planum quævis alia recta CE, & jungatur EG: in triangulo
 (p) Per def. CEG, angulus EGC (p) rectus est; ergo angulus CEG est (q)
 3. l. II. acutus, ac proinde latus CE latere CG (r) majus est: &
 (q) Per cor. 5. p. 32. l. I. eodem modo demonstrabitur aliam quamvis rectam a puncto
 (r) Per 19. C ad planum ductam, perpendiculari CG majorem esse. Ergo
 l. I. CG est omnium brevissima.]

PRO:

PROPOSITIO XII.

EX dato plani (EF) puncto (A,) rectam ad datum planum erigere. Fig. 19.

A quovis extra planum EF puncto D, fac DB ad planum (a) EF rectam. Junctaque BA, duc AC parallelam DB. (a) Per prop. 8. Dico factum. Demonstratio patet ex 8.

Scholium.

PRactice per datum punctum [K in plano dato EF] perpendicularis ducitur dato plano, si norma OKN [angulo suo recto K] ad datum punctum, [et latere OK ad datum planum ita] applicetur, [ut super plano dato, latus OK circa latus alterum immobile KN, circumrotari queat: recta enim secundum KN ducta, (b) erit ad planum datum, ex dato puncto K, erecta perpendicularis.] (b) Per 4. l. 11.

PROPOSITIO XIII.

Linea recta ex eodem puncto (C) ducta (DC, EC,) nequeunt ambae ad idem planum (AB) esse recta. Fig. 20.

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non potest.

[Scholium. Ex hac prop. demonstrari potest prop. 38. hujus Fig. 2. l. 11. a Tacqueto omissa, quæ ita se habet: Si planum FR ad planum BO rectum fuerit, & ab aliquo puncto L in planorum alterutro FR ad alterum planum BO perpendicularis ducatur; ea in communem planorum sectionem XR cadet. Ducatur enim a puncto L, communi sectioni XR perpendicularis LQ; (c) erit ea plano BO recta. Sed per hanc pr. ex (c) Per def. eodem puncto L duæ lineæ rectæ nequeunt ad idem planum OB esse rectæ; adeoque lineæ rectæ LQ, quæ sola a puncto L ad planum OB perpendicularis duci potest, cadet (d) in sectionem communem XR.] (d) Per consensum.

PROPOSITIO XIV.

SI eadem recta (AB) ad duo plana (FG, HLQ) perpendicularis est; plana erunt parallela. Fig. 21.
Sumatur

- Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum C , ex quo ducatur CE parallela ad AB , occurrens plano LQ in E . Erit CE etiam (a) recta plano utrique FG , LQ .
 (a) Per 8. $l. 11.$ Quare si jungantur rectæ AC , BE , erunt anguli A , B (b) recti. Ergo AC , BE sunt (c) parallelæ. Ergo $ACEB$ parallelogrammum est, ac proinde CE , quam jam ostendi utrique plano esse perpendicularem, æquatur (d) AB . Eodem modo ostendam omnes utrique plano perpendiculares esse æquales. Ergo plana (e) sunt parallela. Quod erat demonstrandum.
 (c) Per 29. $l. 1.$
 (d) Per 34. $l. 1.$
 (e) Per def. $8. l. 11.$

PROPOSITIO XV.

Fig. 22. **S**I rectæ duæ se mutuo tangentes (BA , CA) ad duas alias se mutuo tangentes (ED , FD) sint parallele; etiam plana per ipsas ducta erunt parallela.

- (f) Per 9. $l. 11.$ Ex A ducatur AG recta ad planum EF , ponanturque GH , GI , parallelæ ad DE , DF . Erunt hæ (f) parallelæ etiam ad AB , AC . Cum igitur anguli IGA , HGA , sint (g) recti; erunt etiam (h) CAG , BAG recti. Ergo GA , quæ ad planum EF est recta, etiam recta (i) est plano BC .
 (g) Per 27. $l. 1.$
 (h) Per 27. $l. 1.$
 (i) Per 4. $l. 11.$ Ergo plana (k) BC , EF sunt parallela. Quod erat demonstrandum.
 (k) Per prac.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23. **P**lanum ($EHFG$) secans parallela plana (AB , CD), in iis facit sectiones (EH , GF) parallelas.

- (l) Per cor. 1. Si non, cum sint in eodem plano secante, convenient post 31. $l. 1.$ (!) alicubi in I . Quare cum totæ HEI , FGI sint (m) in (m) Per 1. planis AB , CD productis, etiam hæc convenient in I .
 $l. 11.$ Quod est absurdum, contra definitionem 8. hujus.

- Fig. 17. [Schol. Si duorum planorum AF , BF cum plano tertio AE intersectiones AD , BE sint parallela; erit etiam mutua ipsorum AF , BF intersectio CF , ipsis AD , BE parallela. Secentur enim hæc tria plana planis parallelis ABC , DEF ; eruntque (n) AB , BC , CA , ipsis DE , EF , FD respectivé parallela.
 (n) Per hanc prop. $l. 11.$
 (o) Per 10. Ergo (o) ang. $ABC = DEF$, & ang. $BAC = ang. EDF$.
 (p) Per 34. Sed, & (propter parallelogrammum AE) erunt (p) AB ,
 $l. 1.$ DE æquales. Ergo (q) & $BC = EF$, & $CA = FD$. Parallelas
 (q) Per 26. $l. 1.$

lelas autem esse BC ipsi EF, & CA ipsi ED, ostensum prius.
Ergo (a) CF ipsis AD, BE parallela est.]

(a) Per 33
l. 1.

PROPOSITIO XVII.

Parallela plana rectas lineas (BD & GH) proportionaliter secant. Fig. 24.

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, GD: [ducatur]
item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. (b) Per præc.
Planum trianguli BGD secans parallela plana, facit sectiones (c) Per 2.
CF, DG (b) parallelas. Ergo est BC ad CD, ut (c) BF ad l. 6.
FG. Rursum, triangulum BHG secans parallela plana, facit (d) Per præc.
sectiones (d) BH, FI parallelas. Ergo est HI ad IG, ut (e) (e) Per 2.
BF ad FG; hoc est, (quod jam ostendi,) ut BC ad CD. l. 6.
Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea (FE) sit ad planum (AB) recta; Fig. 25.
Omnia, que per ipsam ducuntur plana, sunt ei-
dem plano (AB) recta.

Ductum sit per FE planum aliquod GC faciens cum AB (f) Per hyp.
sectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD se- & defin. 3.
ctionem communem. Cum igitur etiam (f) FE recta sit l. 11.
ad CD; erunt KH (g) parallelæ ad FE. Sed FE ponitur (g) Per 29.
recta plano AB. Ergo & HK rectæ (h) sunt plano AB. l. 1.
Ergo GC planum (i) plano AB rectum est. (h) Per 8.
l. 11.

(i) Per def.
4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

Si duo plana (MF, GD) se secantia, sint ambo Fig. 26.
recta eidem plano (AB;) erit etiam communis
illorum sectio (KL) recta plano (AB.)

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB; ex def.
4. patet ex puncto L posse in plano MF duci rectam per-
pendicularem plano AB, eam nempe quæ ex L esset in
plano MF perpendicularis ad communem sectionem EF.
Similiter, quia planum GD ponitur perpendicularare ad AB,
ex def. 4. patet in plano GD posse duci ex puncto L per-
pendic-

(a) *Per* 13. pendicularem plano AB. Sed ex puncto L tantum (a) una
l. 11. potest duci perpendicularis plano AB. Ergo necesse est ut
 recta quæ ex L perpendicularis est plano AB, existat in u-
 troque plano MF & GD, ac proinde sit ipsa planorum MF
 & GD communis sectio LK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. **S**I angulus solidus (A) tribus planis angulis (BAC, CAD, DAB) continetur; horum duo quilibet reliquo sunt majores.

Si tres plani sunt æquales; patet assertio: Si inæquales, maximus esto BAD. Hic nihilominus minor est duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abscinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens
 (b) *Per con-* ipsis AB, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam
str. anguli (b) BAE, BAC æquales sunt, & latera BA, AE æ-
 (c) *Per* 4. qualia lateribus BA, AC, etiam bases BE, BC æquales (c)
l. 1. erunt. Quoniam vero BC, CD (d) majores sunt quam
 (d) *Per* 20. BD, ablatis æqualibus BE, BC, remanet CD major quam
l. 1. ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus (e) CA, AD.
 (e) *Per con-* Ergo angulus (f) CAD major est quam EAD. Cum igi-
str. tur BAC par sit ostensus BAE. Erunt duo simul BAC,
 (f) *Per* 25. CAD majores toto BAD. Quod erat demonstrandum.
l. 1.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28. **P**Lani anguli, solidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis sunt minores.

Esto solidus angulus A. Planis angulis illum componen-
 tibus subtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno
 (g) *Vide def.* plano existentes. Quo facto constituitur (g) pyramis, cujus
1. l. 12. basis est polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta tri-
 angulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt soli-
 (h) *Per prac.* dum A. Jam vero quia duo anguli ABF, ABC (h) majores
 sunt uno FBC, & duo ACB, ACD majores uno BCD, & sic
 deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L circa basim
 anguli simul sumpti, omnibus simul angulis baseos B, C, D,
 E, F majores. Sed anguli baseos una cum quatuor rectis,
 (i) *Per the-* faciunt bis tot rectos (i) quot sunt latera, sive quot trian-
or. 2. *schol.* gula.
post 32. *l.* 1.

gula. Ergo omnes triangulorum circa basim anguli, una cum quatuor rectis, conficiunt amplius quam bis tot rectos quot sunt triangula. Sed iidem anguli circa basim, una cum angulis qui componunt solidum, conficiunt bis (a) tot rectos (a) *Patet ex* quot sunt triangula. Liqueat ergo angulos solidum angulum A componentes, quatuor rectis esse minores. Quod erat demonstrandum. 32. l. 1.

Corollarium.

EX hac & præcedenti satis colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo sint majores, solidum angulum constitui posse.

Scholium.

EX hac eadem propositione demonstratur celebre theorema, tres tantum figuras planas ordinatas, & æquales, corpus ordinatum continere posse, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. Pentagona 12. Ac proinde quinque tantum sunt ordinata, seu regularia corpora: Pyramis, quæ 4. Octaedrum quod 8. Icosaedrum quod quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaedrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicitur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonstr. Ex duobus æquilateris triangulis non potest constitui angulus solidus: ad hoc enim saltem (b) requiruntur tres. (b) Per def. 10. l. 11.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, potest constitui angulus solidus pyramidis; ex quatuor, angulus solidus octaedri; ex quinque, angulus solidus Icosaedri; cum æquilateri trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. sint 4. rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam vero tres anguli pentagonici (c) sunt 4. rectis (c) *Colligitur ex cor. 1. p. 11. l. 4.* minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia constituere solidum angulum, nempe Dodecaedri.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici solidum angulum cubi, per se patet. Atque ita quinque exsurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla esse alia sic ostenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos. Unus enim

(a) *Per cor.* enim facit duas (a) tertias recti, ac proinde sex tales efficient 12. p. 32. l. 1. 12. tertias recti, hoc est rectos 4. Ergo, a sex æquilateris triangulis non poterit effici solidus angulus, multo minus a pluribus.

A quatuor quadratis, non posse constitui solidum angulum, ac multo minus a pluribus, per se patet.

Anguli pentagonici 4. sunt 4. rectis majores: Singuli enim efficiunt 6. quintas (b) recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus solidus, multo minus a pluribus. (b) *Per cor.* 1. pr. 11. l. 4.

Nec sane ex aliis figuris quibuscumque ordinatis constitui poterit solidus angulus. Tres anguli hexagonici sunt 4. rectis æquales. Unus enim (c) facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc est 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit constitui solidus angulus, multo minus a pluribus. (c) *Per cor.* 2. p. 15. l. 4.

Cum vero tres anguli hexagonici sint 4. rectis æquales; tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut heptagoni, octogoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifestum est reliquas figuras ordinatas omnes, esse ineptas ut solidum angulum constituent; adeoque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari posse.

[P R O P O S I T I O XXII.

Fig. 29.

SI fuerint tres anguli (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo sint majores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales ($AD = AE = BF = BG = CH = CI$;) fieri potest ut ex rectis (DE, FG, HI) æquales illas jungentibus, triangulum constituatur.

Si rectæ jungentes fuerint æquales, patet ex iis triangulum constitui posse. Sint autem inæquales, & maxima sit DE: si tamen DE minor fuerit duabus reliquis $FG + HI$; trian-

(d) *Per* 22. gulum ex illis construi (d) potest. Est autem minor. Nam l. 1. super recta CH fiat angulus HCK ipsi B æqualis, sitque CK =

(e) *Per* 4. CH, & jungantur KH, KI. Et propter rectas KC, CH rectis l. 1. FB, BG respectivè æquales, & ang. KCH = ang. B, erit (e)

(f) *Per* con- KH = FG. Et cum ang. B + ang. HCI, hoc est, (f) ang. str. KCI major (g) sit angulo A, latera autem KC, CI lateribus

(g) *Per* hyp. DA, AE æquantur respectivè; ergo basis KI basi DE major (h) est. Sed summa laterum KH + HI (hoc est, FG + HI)

(h) *Per* 24. l. 1. (h) est. Sed summa laterum KH + HI (hoc est, FG + HI) (i) *Per* 20. major est (i) quam KI; & proinde multo major quam DE.

l. 1. Ergo, &c.

Scholium.

Scholium. Sint tria triangula isoscelia ADE, BFG, CHI, Fig. 29, 30. quorum crura AD, AE, BF, BG, CH, CI sint inter se aequalia, & anguli verticales A, B, C simul sumpti sint quatuor rectis minores, ita tamen ut duo quilibet reliquo sint majores: a basibus autem DE, FG, HI constituatur (a) triangulum LMN, ita ut sit $LM = DE$, $MN = FG$, $NL = HI$; super quibus concitiantur triangulorum isoscelium latera bina quavis contigua in unam rectam coalescere, nempe CI & AD in PL, AE & BF in PM, BG & CH in PN; & ab angulis planis A, B, C, formabitur angulus solidus P; & aequabuntur recta PL, PM, PN. His praemissis, si triangulo LMN (b) circumscribatur circulus; perpendicularis PO ab angulo solido ad planum circuli demissa, in centrum cadet. (a) Per hanc prop. & 22. l. 1. (b) Per 5. l. 4.

Ductis enim OL, OM, ON; in triangulis rectangulis OPL, OPM, OPN, erit (c) $PLq = POq + OLq$, $PMq = POq + OMq$, $PNq = POq + ONq$. Si igitur a quadratorum (d) aequalium singulis PLq , PMq , PNq , auferatur POq , restabunt aequalia OLq , OMq , ONq ; atque inde aequales erunt OL, OM, ON. Ergo circulus transiens per L, M, N, centrum (e) habet in O. (c) Per 47. l. 1. (d) Per ax. 15. l. 1. (e) Per 9. l. 3.

Porro, manifesta est propositionis veritas, siue triangulum LMN fuerit acutangulum, seu rectangulum, seu denique obtusangulum. Vide schol. p. 5. l. 4. & confer fig. 5, 6, 7. ejusdem libri cum fig. 30. hujus.

Corol. ad Schol. praeced. Positis hujusmodi triangulis isosceliis ADE, BFG, CHI; si ex eorum basibus constituatur triangulum LMN; erit crurum aequalium quodvis AD (vel AE, vel BF, &c.) majus radio circuli circa triangulum LMN scripti. Nam $AD = PL$; & in triangulo rectangulo OPL, latus PL angulo recto oppositum, majus (g) est quam OL quod opponitur (h) acuto. (f) Per con- (g) Per 19. l. 1. (h) Per cor. 5. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXIII.

EX tribus angulis planis (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo sunt (i) majores, angulum solidum (P) constituere. Oportet autem (k) tres illos angulos quatuor rectis minores esse. Fig. 29, 30. (i) Exp. 20. l. 11. (k) Per 21. l. 11.

Fac omnia angulorum latera (nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI) aequalia inter se. Junctis DE, FG, HI, constituatur (l) triangulum LMN (cujus latera LM, MN, NL, ipsis DE, FG, HI aequentur respective,) circa quod circulum (m) describe, cujus radius sit OL. Et cum angulorum A, B, C latera singula radio OL (n) sint majora; erit etiam ADq majus quam OL. (l) Per 22. l. 11. & 22. l. 1. (m) Per 5. l. 4. (n) Per cor. ad schol. quam praeced.

- (a) Per prob. quam OLq. Inveniatur (a) OP latus quadrati quo ADq
 2. schol. P. excedit OLq, & a centro O erigatur (b) OP circuli plano recta,
 47. l. 1. junganturque PL, PM, PN. Dico factum. Cum enim an-
 (b) Per 12. gulus O in triangulo OPL rectus sit; erit PLq = (c) POq +
 l. 11. OLq = (d) ADq, & PL = AD. Eodem modo demonstrabi-
 (c) Per 47. tur rectam PM ipsi AE aequalem esse: Et cum sit LM = DE,
 l. 1. erit (e) ang. LPM = ang. A. Et similiter ostendetur esse ang.
 (d) Per con- MPN = ang. B, & ang. NPL = ang. C. Factum est igitur
 str. (e) Per 8. quod petebatur.]
 l. 1.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 31.

PLana parallelepipedum continentia (1.) sunt pa-
 rallelogramma, (2.) quae ex aduerso sunt simi-
 lia, & (3.) aequalia.

1. Pars. Planum AF secans plana BD, FH ex defin. 13.
 (f) Per 16. parallela, facit (f) sectiones BA, FE parallelas. Rursum pla-
 l. 11. num AF secans plana AH, BG per defin. 13. parallela, facit
 (g) Per eand. (g) sectiones AE, BF parallelas. Ergo BAEF parallelogram-
 mum est. Simili argumento reliqua parallelepipedum plana
 sunt parallelogramma.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet AB, BC parallelas
 (h) Per 10. esse EF, FG, erunt (b) anguli ABC, EFG pares. [Ergo paral-
 l. 11. logramma BD, FH sunt (i) equiangula.] Quare cum & la-
 (i) Per 27. tera alternis sunt (k) paria, [hoc est, AB = EF, BC = FG,
 & 34. l. 1. CD = GH, & DA = HE;] similia (l) sunt parallelogram-
 (k) Per 34. ma aduersa BD, FH. Eodem modo probatur de cæteris
 l. 1. (l) Per sch. oppositis.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.
 p. 7. l. 5. & def. 1. l. 6. [Iunge AC, EG; & cum in triangulis ABC, EFG, latera
 (m) Per 34. AB, BC lateribus EF, FG respectiue (m) aequalia sint, & an-
 l. 1. gulus ABC sit angulo EFG (n) equalis; (o) erit basis AC
 (n) Per 10. basi EG equalis, & triangulum ABC triangulo EFG aequale.
 l. 11. Cum vero parallelogramma opposita BD, FH (p) sint triangu-
 (o) Per 4. lorum illorum aequalium dupla, erunt etiam ista aequalia. Et
 l. 1. (p) Per 34. eodem modo probabitur duo quævis alia opposita parallelogram-
 l. 1. ma aequalia esse.]

Fig. 32.

Cor. [1. Parallelepipedum (AB) aut quodvis] prisina se-
 ctum plano (CD) aduersis planis (AS, RB) parallelo, sectio-
 nem habet similem & æqualem planis aduersis. [Demon-
 strabitur eodem modo quo pars secunda ac tertia huius prop.]

- (q) Patet ex Cor. 2. Eadem sectione parallelogramma lateralia (AF, SF,
 parte 1. hu- &c.) dividuntur in partes (q) parallelogrammas (AN & CF,
 jus prop. SN & DE, &c.) (r) similes partibus (SD, DB) in quas
 (r) Per 1. l. 6. & def. 7. recta quævis lateralis (SB) eadem sectione dividitur.

l. 5.

Cor. 3.

Cor. 3. Et præterea, si solidum plano adversis planis parallelo sectum, fuerit parallelepipedum; partes parallelogramma sibi invicem opposita, in quas dividuntur adversa plana lateralia, erunt (a) similes & æquales.]

(a) Patet ex
par. 2. & 3.
hujus prop.

PROPOSITIO XXV.

SI parallelepipedum (AB,) aut quodvis prisma, Fig. 32.
plano (CD) secetur adversis planis parallelo; erit
ut basis (ED) ad basim (DF,) ita solidum (AD)
ad solidum (CB.)

Demonstrabitur eodem modo quo 1. 6.

[Dividatur recta DB in æquales quocunque partes, v. gr.
quatuor, DG, GH, HI, IB; & in basi DF, per divisionum
puncta G, H, I, ducantur rectæ GK, HL, IM, baseos DF la. (b) Per 27.
teribus oppositis DN, BE parallele, & basis in quatuor (b) simili- l. 1. & sch.
lia & (c) æqualia parallelogramma dividetur, nempe DK, GL, p. 7. l. 5. cum
HM, IF; per quorum latera GK, HL, IM, transeant plana def. 1. l. 6.
GO, HP, I Q, solidi CB adversis planis CD, RB parallela, (c) Per 36.
& dividetur illud in quatuor solida DO, GP, H Q, IR, l. 1.
singula (d) similibus & æqualibus numero & magnitudine planis (d) Per 24.
comprehensa, ac proinde (e) æqualia. Quare planum DK & l. 11. cum
solidum DO sunt consequentium DE & CB similes (f) parte, corollaris.
aliquota. Auferatur jam recta DG ex DS quoties poterit, puta (e) Per def.
bis, & relinquetur ST, ipsa DG minor; & a divisionum pun- 15. l. 11.
ctis V, T ducantur rectæ, baseos ED lateribus oppositis ES, ND (f) Per def.
parallele, & per illas ducantur plana, adversis solidi AD 7. l. 5.
planis AS, CD parallela. Quoniam singule DV, VT ipsi DG
æquales sunt; erunt (g) etiam parallelogramma singula NV, VX (g) Vide no-
parallelogrammo DK similia & æqualia, & singula solida CV, tas (b, c.)
VY solido DO (utpote qua (h) similibus & æqualibus multi supra.
tudine & magnitudine planis cum illo continentur) etiam (i) a- (h) Per præc.
qualia. Sed propter rectam ST ipsa DG minorem, erit basis ET cum corolla-
basi DK minor (k), & solidum AT solido DO minus; (si enim (i) Per def.
utraque illorum solidorum super æqualibus planis AS, CD, 15. l. 11.
intra invicem collocari supponantur, propter ST minorem quam (k) Per 1.
DG, solidum AT parti solummodo solidi DO exæquabitur.) l. 6.

Quoties igitur planum DK continetur in antecedente DE, toties
etiam solidum DO in antecedente DA continebitur. Et eodem
modo ostendi potest, quasunque consequentium (baseos DE, &
solidi CB) similes partes aliquotas, in antecedentibus (basi ED, (1) Per ra-
& solido AD) æquali numero contineri. (1) Ergo basis ED tionum a-
erit ad basem DF, ut solidum AD est ad solidum CB. ditionum in-
E. D. PRO. def. l. 5.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 33.

AD datam rectam lineam (AB,) & ad datum in ipso punctum (A,) constituere angulum solidum (AHIL,) æqualem solido angulo dato (CDEF.)

Nota, litterarum que designant angulum solidum, primam esse ad punctum in quo est angulus. Sic angulus solidus AHIL est ad punctum A, & CDEF ad punctum C.

- (a) Per 11. A puncto quovis F in recta CF, demitte (a) FG plano DCE rectam, ducanturque recta DF, FE, EG, GD, GC. Fac $AH = CD$, & $\text{ang. } HAI = \text{ang. } DCE$, & $AI = CE$; atque in plano HAI, fac $\text{ang. } HAK = \text{ang. } DCG$, & $AK = CG$. Tum erige
- (b) Per 12. (b) KL rectam plano HAI, & sit $KL = CF$, ducaturque AL. Erit angulus solius AHIL par dato CDEF. Nam junctis HK, IK, HL, IL, propter HA, AK ipsis DC, CG respective æquales, & $\text{ang. } HAK = \text{ang. } DCG$, erit (c) $HK = DG$. Et eodem modo, conferendo triangula IAK, ECG, ostendetur (d) $KI = GE$; & in triang. HKL, DGF, (e) $HL = DF$; & in triang. IKL, EGF, $IL = EF$; & in triang. AKL, CGF, $AL = CF$.
- (c) Per def. Triangula igitur AHL, CDF sunt sibi mutuo æquilatera, & 3. l. 11. & proinde (f) æquiangula. Unde $\text{ang. } HAL = \text{ang. } DCF$. Et ob eandem causam in triangulis sibi mutuo æquilateris AIL, CEF, (f) Per 8. est $\text{ang. } LAI = \text{ang. } FCE$. Sed & $\text{ang. } HAI = \text{ang. } DCE$ per constr. Factum est igitur quod petebatur.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 34.

AData recta linea (AB,) dato solido parallelepipedo (CD) simile & similiter positum parallelepipedum (AK) describere.

Ex angulis planis BAH, HAI. BAI. qui æquales sint ipsis

- (g) Per præc. FCE, ECG, FCG, fac (g) angulum solidum A angulo solido C parem. Item, sit (h) $FC : CE :: BA : AH$, & $CE : CG :: AH : AI$, (& erit ex æquo (i) $FC : CG :: BA : AI$;) & perficiatur parallelepipedum AK. Erit hoc simile dato.
- (k) Per 24. Nam per constr. parallelogramma BH, FE; & HI, EG; & BI, FG similia sunt; & horum ideo opposita (k) illorum
- (l) Per def. oppositis. Ergo sex plana solidi AK similia sunt sex planis solidi CD; ac proinde (l) AK, CD sunt solida similia.]

PRO.

PROPOSITIO XXVIII.

Planum per adversorum planorum diametros (*AC*, *EG*) transiens, parallelepipedum secat in duo æqualia prismata. Fig. 31.

Quoniam (a) *BG*, *BE* sunt parallelogramma; *CG*, *AE* (a) *Per* 24. æquidistant [*hoc est, parallela sunt*] eidem *BF*. Ergo & (b) *inter se sunt parallela*, ac proinde in uno sunt plano. Ergo (b) *Per* 9. rectæ *AC*, *EG* (c) in uno sunt plano. Jam vero planum (c) *Per* 7. per illas ductum secare parallelepipedum in duo prismata æqualia sic ostendo. l. 11.

Intelligatur prisma *AEGCDH* supra planum suum *EACG* ita constitui, ut anguli *D*, *H* vergant ad angulos *B*, *F*. Manifestum est tum adhuc fore inter parallela plana *BADC*, *FEHG*. Tum vero necesse est ut *D* cadat in *B*, & *H* in *F*. Cadat enim *D* extra *B* si fieri potest, in *N*. Angulus *BAC* (d) *Per* 27. æquatur (d) angulo *DCA*. Sed *DCA* æquatur *NAC*, (est l. 1. enim unus idemque angulus.) Ergo *BAC* & *NAC* æquales sunt: quod est absurdum. Ergo *D* incidit in *B*; & pari de causa *H* in *F*. Ergo prisma *AEGCDH* congruit (e) *Per* axio. prismati *ACGEFB*, ac proinde (e) æqualia sunt. 7.

[*Tacqueti demonstratio parallelepipedis quidem rectis convenit, quorum scil. plana lateralia sunt basibus recta; & forte etiam ad unius aut alterius speciei obliqua accommodari potest. Cum vero in propp. seqq. hujus & proximi libri, supponatur hæc demonstratio ad parallelepipeda quomodocunque obliqua extendere: ad accuratius Euclidis ipsius ratiocinium hic necessario recurrendum est, quo ostenditur omnia omnino parallelepipeda quæ secantur a plano AG, per adversorum planorum diametros parallelas AC, EG transeunte, in duo æqualia (addo, & similia) prismata secari.*

Est enim triangulum *ABC* triangulo *ADC* (f) æquale, (f) *Per* 34. l. 1. & (ob angulos æquales *B* (g) & *D*, *BAC* (h) & *DCA*, *BCA* (g) *Per* eand. & *DAC*,) etiam (i) simile; & ob eandem causam triangula (h) *Per* 27. *EFG*, *EHG* sunt æqualia & similia. Æqualia etiam & similia l. 1. sunt (k) parallelogramma sibi invicem opposita *AF* & *CH*, (i) *Per* 4. l. 6. itemque *BG* & *AH*; atque est *AG* utrique prismati commune. (k) *Per* 24. l. 11. Prisma igitur *ABCGEF*, *ADCGEH*, continentur a similibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis, & proinde sunt (l) similia & (m) æqualia. 2. E. D.] (l) *Per* def. 9. l. 11. 165

P R O. 11. 111

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Fig. 35. & 36. **P**arallelepipedum ($FEAGKIMC$ & $FEBHLOMI$) quæ eandem habent basim ($EFIM$) & altitudinem eandem, ac proinde existunt inter parallela plana ($EFIM$, $GAOL$), æqualia sunt.

Fig. 35. Vel enim existunt inter lateralia parallela plana $EAOM$, & $FGLI$, vel non. Esto primum. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula AEB , CMO , item GFH , KIL sibi mutuo æquilatera & æquiangula esse. Quare ut in præcedenti, ostendam prismata $CMOLIK$, $AEBHFG$ sibi mutuo imposita congruere, ac proinde (a) æqualia esse. Quare addito communi solido $FEBHKCMI$, tota parallelepipedum $FEAGKIMC$, $FEBHLOMI$ æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

[Aliter. In parallelogrammis $AEMC$, $BEMO$, latera opposita sunt (b) æqualia, hoc est, $AE=CM$, $BE=OM$, $AC=EM=BO$; & ablata communi recta BC , $AB=CO$. Ergo triangula ABE , COM sunt sibi mutuo æquilatera, & proinde (c) æqualia: & eodem modo ostendetur triangula FGH , IKL æqualia esse: Opposita autem parallelepipedorum plana sunt (d) æqualia, nempe $AF=CI$, & $BF=OI$, & $AK=EI=BL$: unde ablato communi BK , erit $AH=CL$. Quare prismata $AEBHFG$, $CMOLIK$ a similibus planis nullo modo & magnitudine aequalibus continentur, & proinde (e) æqualia sunt. Commune apponatur solidum cujus basis est FM & planum oppositum BK , & tota parallelepipedum $FEAGKIMC$, $FEBHLOMI$ æqualia erunt. Q. E. D.]

Fig. 36. Sit deinde parallelepipedum $FXQEMIPR$ non inter eadem lateralia plana parallela existens cum parallelepipedo $FEAGKIMC$. Quoniam ex hypothese GK , AC , RP , QX sunt in uno plano ad basim $EFIM$ parallelo; RP , QX secant GK in L & H , AC vero in O & B ; junganturque EB , MO , FH , IL . Facile ostensu est plana solidum $FEBHLOMI$ continentia, parallelogramma esse ex aduerso æquidistantia. [Nam aduersa plana quadrilatera solidi istius sunt in iisdem planis cum oppositis parallelepipedorum $AFIC$, $QFIR$ planis, & proinde (f) parallela sunt. Solidi enim $BFIO$ quadrilatera opposita $BEMO$, $HFIL$ sunt respectiue in iisdem planis cum oppositis $ACME$, $GKIF$ planis parallelepipedum $AFIC$; & ejusdem solidi $BFIO$ quadrilatera opposita $BEFH$, $MOLI$ sunt in iisdem planis respectiue cum oppositis

oppositis planis $\square$ EFX, MIPR parallelepipedum $\square$ FIR: est vero parallelogrammum EI, solido cum parallelepipedis commune, & quadrilaterum BOLH est in plano ipsi EI parallelo per hypothesin. Patet igitur solidum BFIO comprehendi a planis quadrilateralis ex adverso parallelis,] adeoque solidum illud (a) esse (a) Per def. parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipedum FXQEMIPR, & FEAGKCM, sunt æqualia. Ergo etiam sunt æqualia inter se. Quod erat dem.

Scholium.

HÆC propositio similis est propositioni 35. lib. 1. affirmat enim de solidis, quod illa de planis. Quare similis etiam erit reliquorum casuum demonstratio.

PROPOSITIO XXXI.

Parallelepipeda super æqualibus basibus (AO & Fig. 37. EG) & in eadem altitudine (S) sunt æqualia.

Habeant parallelepipeda primo latera ad bases normalia. Ad latus FG productum, fiat parallelogrammum GMKH æquale ac simile parallelogrammo AO: perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipsi KH in Q & L. Jam vero intelligantur super GK, GQ, GP constitui parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta, altitudo autem omnium communis sit S. Solidum EGS est ad solidum GPS, ut EG (b) ad GP; hoc est, (quia EG, AO per hyp. æquantur,) ut AO ad GP; hoc est, per constr. ut GK ad GP; hoc est, ut (c) GQ ad GP; hoc est, (d) ut solidum GQS est ad idem solidum GPS. Quoniam igitur solida EGS & GQS eandem habent rationem ad solidum GPS, erit solidum EGS (e) æquale GQS; hoc est, solido (f) GKS; hoc est, (quia bases GK, AO sunt (g) æquales & similes,) solido AOS. Quod erat propositum. Per totum discursum solida accipiuntur recta.

Habeant deinde parallelepipeda data EGS, AOS latera ad bases EG & AO obliqua. Fiant super EG, AO parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta in altitudine S. Hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem sint paria inter se, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonstrandum.

PRQ.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 38.

Parallelepipeda quavis æque alta, sunt inter se ut bases.

Bases sint GO & A , [*& altitudo communis sit K .*] Super
(a) Per 44. CO fac (*a*) parallelogrammum OE par ipsi A , [*in angulo OCE*
l. 1. *æquali dato G .*]

Super BC , OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K : hæc igitur partes erunt unius parallelepipedum BEK .

(b) Per 25. Ergo (*b*) parallelepipedum OEK est ad parallelepipedum
l. 11. BCK , ut basis OE ad basim BC ; hoc (*c*) est, ut basis A ad

(c) Per construct. basim BC . Sed quia bases OE & A sunt æquales, parallele-

(d) Per pract. pipeda OEK & AK (*d*) æqualia sunt. Ergo etiam parallelepipedum AK est ad parallelepipedum BCK , ut basis A ad basim BC . Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis ostensum est, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuslibet prismatibus in corollario 1. post prop. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 39.

Similia parallelepipeda (HA & CM) sunt in triplicata ratione laterum homologorum (AB , BC .)

Sint parallelepipeda AH , CM similia. Ergo omnia ipso-
(e) Per def. rum plana similia (*e*) sunt; adeoque AB ad BC (*f*) est ut
9. l. 11. EB ad BO ; & ut FB ad BG , sic EB ad BO . Insuper &
(f) Per def. anguli (*g*) planorum æquales sunt. Collocentur sic igitur
1. l. 6. solida AH , CM , ut æquales anguli CBO , ABE sint oppositi
(g) Per eand. [*in eodem plano,*] & latera AB , CB in directum; tum vero
(h) Patet ex etiam (*h*) EB , OB [*itemque FB , BG*] in directum erunt.
13. & 14. l. Cogitentur jam super planis EC & CO facta solida, sic ut
1. solida KB , HA sint unum parallelepipedum, & KB , PO
(i) Per 25. faciant unum similiter parallelepipedum, & PO , CM unum
l. 11. quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA est ad
(k) Per 1. solidum KB (*i*) ut AE ad EC ; hoc est, ut (*k*) AB ad BC ; hoc
l. 6. est, (ut per hyp. ostendi supra,) ut EB ad BO ; hæc (*l*) est, ut
(l) Per eand. EC ad

EC ad CO; hoc est, ut solidum (a) idem KB ad solidum (a) *Per 25.*
 PO. Continuant ergo eandem rationem tria solida HA, ^{l. 11.}
 KB, PO. Jam vero solidum KB est ad solidum PO, ut
 basis EC ad basim CO; hoc est, ut EB ad BO; hoc est, ut
 (b) FB ad BG; hoc est, ut planum FC ad planum CG; hoc ^{(b) Ostendi}
 est, ut idem rursus solidum PO ad CM solidum. Quatuor ^{supra ex hyp.}
 ergo solida HA, KB, PO, CM, sunt continue proportionalia. ^{(c) Per def.}
 Ergo ratio primi HA ad quartum CM est (c) triplicata ra- ^{10. l. 5.}
 tionis primi HA ad KB secundum; hoc est, rationis (d) AE ^{(d) Per 25.}
 ad EC; hoc est, (e) rationis homologorum laterum AB ad (e) ^{Per 1. l. 6.}
 BC. Quod erat demonstrandum.

[Aliter. Similium parallelepipedorum HA, QS, sint latera Fig. 39. &
 homologa AB & RS, EB & TS, FB & VS. Dico solidum 40.
 HA esse ad solidum QS in triplicata ratione AB ad RS.

Producantur AB, EB, FB ad C, O, G, ut sint BC, BO, BG
 rectis RS, TS, VS respectue aequales; & compleatur parallelo-
 grammum CO, & parallelepipedum CM. Et propter ang. OBC ^{(f) Per 15.}
 = (f) ang. ABE = (g) ang. RST, & latera BC, OB lateribus ^{l. 1.}
 RS, TS respectue (h) aequalia, parallelogramma OC, RT erunt ^{(g) Per hyp.}
 similia & (i) aequalia. Eodem modo similia & aequalia erunt ^{(h) Per def. 1. l.}
 parallelogramma CG, RV; atque etiam OG, TV: unde & his 6.
 opposita parallelogramma, (nempe bina qualibet, planis simili ^{(h) Per con-}
 bus & aequalibus opposita in utroque solido) (k) similia & str.
 aequalia erunt. Sunt (l) igitur solida QS, CM similia & ^{(i) Per axio.}
 aequalia; ac proinde (m) solida HA, CM similia erunt, & ^{7.}
 AB:BC::EB:BO::FB:BG. Super basibus EC, CO perficiantur ^{(k) Per 24.}
 parallelepipeda BK, PO ejusdem altitudinis cum AH. Erit (l) ^{l. 11.}
 itaque AB:BC vel (n) RS::EB:BO vel ST::FB:BG vel SV; ^{(l) Per def.}
 hoc est, (o) AE:EC::EC:CO::FC:CG; hoc est, (p) AH:(m) ^{15. l. 11.}
 BK::BK:PO::PO:CM vel QS. Ergo (q) AH est ad QS & def. 9. l.
 in triplicata ratione AH ad BK. Sed AH:BK:: (r) AE: ^{11.}
 EC:: (f) AB:BC vel RS. Ergo (r) solidum AH est ad simile ^{(n) Per con-}
 solidum QS in triplicata ratione lateris AB ad sibi homologum ^{str.}
 lateris RS. Q. E. D. ^{(o) Per 1. l. 6.}
^{(p) Per 25.}

Cor. 1. Hinc si fuerint quatuor lineae rectae continue propor- ^{l. 11.}
 tionales; ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum (q) ^{Per def.}
 super prima descriptum, ad parallelepipedum simile similiter- ^{10. l. 5.}
 que descriptum super secunda; & proinde datis parallelepipe- ^{(r) Per 25.}
 dorum similium HA, CM, lateribus homologis AB, BC, in- ^{l. 11.}
 venietur illorum ad invicem proportio, faciendo AB, BC, X, ^{(f) Per 1. l. 6.}
 Y::: Erit enim HA:CM::AB:X. Quare etiam, datis so- ^{(t) Per 11.}
 lidis HA, CM, & ipsius HA latere quovis AB; alterius solidi ^{l. 5.}
 lateris homologum BC erit duorum mediorum (u) proportionali- ^{(u) Vide sch.}
 um prius inter AB & Y] ^{p. 13. l. 6.}

Cor. 2. Hinc corrigendus est eorum error, qui solido-

rum similium eandem ac laterum esse rationem opinantur. Linea enim dupla cubus non est tantum duplus, sed octuplus cubi alterius. Et linea tripla cubus non est tantum triplus, sed vigecuplus septuplus cubi alterius. Nam $1, 2, 4, 8 \div \div \div$ & $1, 3, 9, 27 \div \div \div$. Et ita de corporibus quibuscunque similibus est censendum; uti deinceps patebit.

Cor. 3. Hinc quoque pendet celeberrimum illud de cubo duplicando Problema: de quo infra, ad calcem lib. 12. Ubi etiam ostendetur, qua methodo cubi, vel corpora quavis similia, in data ratione augeri vel diminui possunt.

[Scholium 1. Cum cubi sint similia solida parallelepipeda, & proinde sint in triplicata ratione laterum suorum; inde fit ut ratio triplicata quantitatum quarumvis, per rationem cuborum earundem quantitatum sapissime designari solet. Sic ex. gr. ratio triplicata rationis A ad B , saepe denominatur ratio $Acub.$ ad $Bcub.$ vel Ac ad $Bc.$]

Scholium 2.

Quod hic de parallelepipedis ostensum est, in libro 12. demonstrabitur de pyramidibus propof. 8. de quibuscunque prismatibus coroll. 2. post p. 9. de conis & cylindris p. 12. de sphaeris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 40.

SI parallelepipeda (QS, CK) aequalia sunt; reciprocant bases & altitudines, (hoc est, basis RT est ad basim FK , ut reciproce altitudo FC ad altitudinem SV .)

Et si reciprocant bases & altitudines, aequalia sunt.

1. Pars. Sint primo latera ad bases recta. Si jam solidorum QS, CK altitudines sint pares, res patet. [Nam propter

(a) Per 32. l. 11. aequales altitudines, (a) erunt parallelepipeda ut bases: atqui ista

(b) Per hyp. (b) sunt aequalia; ergo & bases erunt aequales, & proinde eadem est ratio aequalitatis inter altitudinem parallelepipedi prioris & altitudinem posterioris, ac inter basem posterioris & basem prioris.]

Si altitudines sint inæquales, a majori FC , abscinde FE parem SV : & per E duc planum EL ad FK parallelum.

(c) Per 32. l. 11. Basis RT est ad basim FK , ut solidum (c) QS ad solidum

(d) Per 25. l. 11. EK ; hoc est, (quod ex hyp. paria sint solida QS, CK), ut solidum CK ad EK solidum; hoc est, ut (d) CG ad EG ;

(e) Per 1. l. 6. hoc est, ut (e) CF ad EF ; hoc est, ex constr. ut CF reciproce ad VS . Quod erat demonstr.

Sint

Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigantur super iisdem basibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua (a) parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc (a) *Per 30* per 1. partem reciprocent bases & altitudines, etiā illa reciprocabunt. Quod erat demonstrandum. *l. 11.*

2. Pars. [Sint latera ad bases recta, & altitudines æquales. Cum igitur bases & altitudines jam ponantur reciproca; ob harum aequalitatem, æquabuntur & illa; ac (b) proinde ipsa (b) *Per 31* etiam parallelepipeda. *l. 11.*

Deinde,] sint altitudines inæquales, lateraque ad bases recta; & ex majori CF, ipsi VS sume parem EF. Solidum QS est ad solidum EK, ut (c) RT ad FK; hoc est, ex hyp. (c) *Per 32* ut CF ad VS; hoc est, ex constr. ut CF ad EF; hoc est, ut (d) CG ad EG; hoc est, ut solidum (e) CK ad solidum idem (d) *Per 1.* EK. Ergo solida QS & CK eandem habent rationem (e) *Per 25* ad EK. Ergo sunt paria. Quod erat demonstrandum. *l. 11.*

[Et cum parallelepipeda obliqua sint rectis æque altis & super iisdem basibus (f) æqualia; illa etiam, si reciprocent bases & altitudines, æqualia sunt.] (f) *Per 30* *l. 11.*

Corollaria.

QUÆ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop. 29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt prismatis triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur, 1. Prismata triangularia æque alta sunt ut bases A, B. *Fig. 41* [Et proinde, si eandem vel æquales habeant bases, & eandem altitudinem, æqualia sunt.]

2. Si similia fuerint, eorum proportio triplicata est proportionis laterum æqualibus angulis oppositorum. [Et proinde corollaria prop. 33. ad illa applicari possunt.]

3. Si æqualia sunt, reciprocent bases & altitudines: & si reciprocent bases & altitudines, æqualia sunt.

Scholium.

Quod hic propos. 34. ostensum est de parallelepipedis: demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9. de prismatis quibuscunque coroll. 3. post p. 9. de conis & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

Valde prolixa, servit sequenti, quam sine illa demonstrabimus.

Q

PRO.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 42.

Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionabilibus (A, B, C) factum, aequatur parallelepipedo (IN) facto a media (B) & equiangulo priori.

Parallelepipedum DH basis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C: latus vero EG basi insistent, æquale mediae B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedum deinde IN tria latera LX, IX, XM (ac proinde omnia reliqua) sint æqualia mediae B; & angulus solidus X sit æqualis angulo solido E. Erit parallelepipedum IN factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam esse æquale.

Cum enim per hyp. & constr. sit ut FE ad LX, ita reciprocè IX ad DE, erunt (a) bases DE, IL æquales. Jam quia anguli solidi ad E & X sunt æquales; si ponantur intra invicem, (b) congruent; & ob æqualitatem rectarum EG, XM, puncta M, G coincident. Quare una erit utriusque solidi altitudo perpendicularis, nempe a punctis M, G jam congruentibus, in planum baseos demissa. Solida (c) igitur DH, IN æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

(d) Vide sch. **H**IC porro observabimus, id quod magnum habet usum, ex tribus lineis quomodocunque inter se (d) ductis, ejusdem magnitudinis solidum [parallelepipedum rectum, seu planis rectangulis comprehensum] gigni.

ABC. CAB. BCA.

1 2 3

In schemate hic appposito, duæ primæ literæ designant basim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum secundo.

Basim AB est ad basim CA per 1. 6. ut B latus ad C latus: hoc est, reciprocè ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per p. 34.

ABC æ. CAB.

Eodem modo ostendes primum tertio, & tertium secundo esse æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda similia, similiterque a lineis proportionalibus descripta, etiam ipsa sunt proportionalia: & e converso. Patet

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum, per 33. hujus, erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent linæ.

Conversa patet ex 35. l. 5. [Rationes enim parallelepipedorum ex hypothesi æquales, (a) triplicate sunt rationum homologorum laterum, a quibus parallelepipeda similia similiter describuntur: & proinde horum laterum rationes (b) erant æquales.] (a) Per 33. l. 11. (b) Per 35. l. 5.

Propositio vera est de quibuscunque similibus corporibus, quæ patebit l. 12. triplicatam habere laterum rationem.

[Corol. Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices cubicas. Si nempe multiplicentur inter se quantitates quæ sub radicis cubica signis sunt, & producto præfigatur ejusdem radicis cubica signum. Exempli gr. sit $\sqrt[3]{c5}$ multiplicanda in $\sqrt[3]{c4}$: producet $\sqrt[3]{c20}$. Nam ex multiplicationis definitione, debet esse unitas ad multiplicantem (sive $\sqrt[3]{c4}$) ut est multiplicandus (sive $\sqrt[3]{c5}$) ad productum. Ergo per hanc prop. erit cubus unitatis ad cubum multiplicantis, ut cubus multiplicandi est ad cubum producti: hoc est, si pro numero producto ponatur P, erit $1.4::5. P$. Sed $1.4::5. 20$. Ergo $P = 20$, & $P = \sqrt[3]{c20}$.

+ vid. Erat.

Et similiter, ex divisionis definitione ostendetur, quod $\sqrt[3]{c20}$ divisa $\sqrt[3]{c5}$ exhibebit quotum $= \sqrt[3]{c4}$. Vide cor. 1. p. 32. l. 6.

Et universaliter, quantitatum radicalium ejusdem cujuscunque ordinis sive speciei, facta (vel quoti) habentur, multiplicando (vel dividendo) quantitates quæ sub signis radicalibus sunt, & producto (vel quoti) idem signum radicale præfigendo.

Propositionem 38. jam supra demonstravimus, in schol. p. 13. hujus l. 11. Sequitur

PROPOSITIO XXXIX.

SI solidi parallelepipedi (AB,) eorum quæ ex Fig. 41. adverso planorum (AC, DB) latera, (nempe AE, FC, AF, EC; & DH, GB, DG, HB) bifariam secta sint: per sectiones autem plana (ILQO, PKMR) sint extensa; planorum communis sectio (ST,) & solidi parallelepipedi diameter (AB,) bifariam se mutuo secabunt.

Ducantur rectæ SA, SC, TD, TB. Et propter bisectas DG, HB, DH, GB, ac rectam RP ipsis DG, HB, rectamque OQ ipsis

- (a) Per 33. ipsis DH, GB (a) parallelam; dividetur parallelogrammum
l. 1. GH in quatuor equalia parallelogramma, toti & sibi invicem
(b) Per 27. (b) similia & similiter posita. Quare OR, PQ sibi mutuo
& 34. l. 1. imposita congruent, & $DT = (c) TB$. Parallelogramma
cum def. 1. etiam OR, PQ , angulos ODR, PBQ cum simili sibiipsis
l. 6. (c) Per ax. parallelogrammo GH communes habentia, circa eandem dia-
7. l. 1. metrum (d) existunt, & proinde DTB est (e) linea recta.
(d) Per 26. Eodem modo ASC recta linea est, & $AS = SC$. Porro, AB
l. 6. parallela & aequalis est (f) ipsi FG , atque FG parallela &
(e) Per def. & aequalis est ipsi CB : ergo (g) AD, CB sunt parallela &
37. l. 1. aequales; unde & AC, DB , quae eas jungunt, sunt (h) paralle-
(f) Per 24. lae & aequales, ac proinde earum dimidia AS, BT aequales
l. 11. & 34. erunt; & praeterea AB, ST sunt in (i) eodem plano $ACBD$.
l. 1. (g) Per 9. l. In triangulis itaque ASV, BTV , propter angulos AVS, BVT ad
11. & ax. 1. verticem oppositos, & proinde (k) aequales; & angulos alios
(h) Per 33. ASV, BTV , & proinde (l) aequales; & latera AS, BT aequa-
l. 1. lia; omnia reliqua erunt (m) equalia, & $SV = VT$, & $AV = VB$.
(i) Per cor. Ergo communis sectio ST & diameter AB se mutuo bifariam
p. 7. l. 11. secant. $Q. E. D.$
(k) Per 15. Corol. Hinc in omni parallelepipedo, diametri omnes se mutuo
l. 1. (l) Per 27. bifariam secabunt in uno eodemque puncto V .]
l. 1.
(m) Per 26.
l. 1.

PROPOSITIO XL.

Fig. 44. & 45. **S**I fuerint duo prismata triangularia aequalis alti-
tudinis ($ABFGOC$ & $IKLPXQ$), quorum
unum basim habeat parallelogrammam (OB) duplam
baseos alterius (IKL) quae triangula sit; prismata
erunt aequalia.

- Nam si perficiantur parallelepipeda KR & CH , erunt
(n) Per 31. haec (n) aequalia, ob basium CA, MK , & altitudinum aequa-
l. 11. litatem. Ergo etiam prismata ipsorum (o) dimidia aequalia
(o) Per 28. erunt. Quod erat demonstrandum.
l. 11.

[Sunt nempe haec duo prismata triangularia, aequalium pa-
rallelepipedorum per diagonales sectorum dimidia. Hoc tantum
interest, quod in posteriore sectio fit per baseos diagonalem, in
priori non item.]

Scholium I.

EX haecenus demonstratis habetur dimensio prismatum
triangularium, & [ejusmodi] quadrangularem [quo-
rum adversa plana quadrangularem quaecunque sunt parallela,]
seu parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in
basim. Ut si altitudo sit 10. pedum, basis vero pedum
quadratorum]

quadratorum 100. (mensurabitur autem basis per schol. p. 36. vel 41. l. 1.) multiplica 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro soliditate prismatis dati.

Demonstratio facilis est. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in basim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ducta, cum per 31. æquale sit parallelepipedo recto super eadem basi ad eandem altitudinem constituto.

Fig. 45.

Deinde cum totum parallelepipedum producitur ex altitudine in totam basim; semissis parallelepipedi, (hoc est, prisma triangulare, per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam basim, triangulum nempe ILK.

[Scholium 2. Cum prismata polygona in triangularia resolvi possint, vel etiam ad triangularia æqualis baseos & altitudinis (a) reduci; quæ igitur de prismatis triangularibus traduntur in corollariis p. 34. & in schol. 1. pr. hujus 40, de quibuscunque prismatis polygonis vera sunt. At cum Tacqueto visum fuerit illa omnia ex iis quæ in lib. 12. de pyramidibus demonstrantur, derivare; non opus est ut eadem hic aliunde deducendo, tyronibus moram injiceremus.]

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER DUODECIMUS.

NOBIS OCTAVUS.

QUOD in libris præcedentibus hæcenus præstare conati sumus, ut Mathematicum elementa ad faciliorem ac breviorum methodum revocaremus; id imprimis præstandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cum maxime sit necessaria, demonstrationes adeo sunt prolixæ, ut tyrones in desperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propositum nobis est; ut tamen a rigore Geometricæ demonstrationis non recedamus. Quod utrum simus affecti, lector intelliget, si hæc nostra cum Euclidea prolixitate contulerit.

Postquam vero Euclides libro priore solidorum elementa exposuisset, & corporum facillimorum, utpote superficiebus planis terminatorum, mensuras definiuisset; In Duodecimo hoc libro corpora superficiebus curvis terminata, Cylindros nimirum, Conos atque Sphæras considerat: ea inter se comparat: & eorum mensuras definit. Utilissimus sane est hic liber; eo quod principia illa contineat quibus tot celeberrimas demonstrationes de Cylindro, Cono atque Sphæra Geometrarum Principes, præsertim vero Archimedes, inadificarunt.

DEFINITIONES.

Fig. 1. lib. 12. **P**Yramis est solidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehensum, ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) constitutis.

Planum Z basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura [rectilinea:] ex cujus lateribus singulis triangula surgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntia.

U

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis [*triangularis, quæ pro basi triangulum habet,*] inter solidas prima & simplicissima est.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A,) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri cœperat; superficies, a recta linea (ACF) descripta, dicitur conica superficies: corpus vero quod hac superficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur.

Vertex conî est A.

Basis conî est circulus CL.

Axis conî est recta (AB) ex vertice ad baseos centrum ducta.

Latus conî est recta (AC) a vertice ad baseos circumferentiam ducta, quam esse totam in conî superficie, ex ejus genesi est manifestum.

Conus rectus est, cum axis (AB) est basi rectus. Fig. 2.

Conus scalenus, seu obliquus est, cum axis (AB) non est ad basim rectus. Fig. 3.

Fit etiam conus rectus a triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. Fig. 2.

3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (CL, OQ,) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, sic ut mota sibi ipsi [*et recta BA circuloꝝ centra jungenti*] semper parallela maneat; superficies a recta (COF) descripta, dicitur cylindrica superficies: corpus vero quod hac superficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur.

Bases cylindri sunt circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri est recta (AB) basium centra connectens.

Latus cylindri est recta (OC) in cylindri superficie utramque basim tangens.

Rectus cylindrus est, cum axis ad bases rectus est. Fig. 4.

Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad bases non est rectus. Fig. 5.

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto. Fig. 4.

4. Similes conî & cylindri sunt, quorum axes (AK, ZO) & basium diametri (BF, QR) sunt proportionales; [*et quorum axes vel sunt basibus recti, vel iisdem similiter inclinati.*] Fig. 14.

5. Sphæra est solidum comprehensum una superficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipsam posito ductæ, sunt æquales.

Q 4

Punctum

Punctum illud centrum dicitur.

Sphærae diameter est recta per centrum ducta ad superficiem utrimque pertingens.

Fig. 6.

Generatur sphæra, si semicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inscriptæ, aut circumscriptæ, sive figura minores vel majores, in figuram definere dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt quantitate minori quacunque data, seu quantumvis parva.

Itaque si ea, quæ figuræ alicui inscribuntur, ab ea tandem deficient defectu minori quocunque dato; inscripta dicuntur in figuram definere: Et si ea quæ alicui figuræ circumscribuntur, excedant eam tandem excessu minori quocunque dato; dicuntur rursus circumscripta definere in figuram.

Fig. 9.

[7. Si fiat triangulum BAC in semicirculo BDLC, & super lateribus BA, AC pro diametris, ducantur semicirculi minores BNA, AMC; figura curvilinea BDAN, ALCM, semiperiphæria circuli minoris exterius, & arcu circuli majoris interioris, singula terminata, ab earum inventore, Lunulæ conjugatæ Hippocratis Chii appellantur.

Fig. 10.

Si arcus BDA, ALC sint æquales, ac proinde quadrantes sint periphæria majoris circuli, denominentur ejusmodi lunulæ, quadrantales.

Fig. 11.

Si recta ED arcus lunula quadrantalæ proportionaliter secet in E, D, ut sit arcus BE ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA, vocentur area AED, BED portiones lunulæ quadrantalæ.

8. Lunula, vel ejusdem portio quadrari dicitur, si ei æqualis figura rectilinea construi possit.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7.

Polygonorum similium circulis inscriptorum proportio est duplicata proportionis diametrorum (AF, IC;) [atque adeo etiam semidiametrorum (AZ, IX.)]

Ducantur AO, FB; IR, LC. Quia polygona ponuntur similia, æquales erunt (a) anguli OBA, RLI, & latera OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (b) anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iisdem arcubus BA, LI insistant, sunt (c) æquales. Anguli vero FBA, CLI in semicirculis sunt (a) recti

(a) Per def. 1. l. 6.

(b) Per 6. l. 6.

(c) Per 21. l. 3.

(a) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC (b) (a) Per 31. æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL sibi mutuo l. 3. æquiangula sunt, erunt (c) similia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona sunt similia, erit pro- (b) Per cor. portio eorum duplicata (d) proportionis laterum BA, LI; (c) per 4. l. 6. hoc est, ut jam ostendi, duplicata proportionis diametrorum l. 6. AF, IC, [ac proinde (e) etiam semidiametrorum AZ, IX.] (d) Per 20. Quod erat demonstrandum. l. 5. (e) Per 15.

Corollaria.

1. Polygonorum similium circulis inscriptorum ambitus sunt inter se ut diametri. Fig. 6. & 7.

Cum ostensum jam sit AB esse ad LI, ut AF ad IC; etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC: & sic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia simul latera ad simul omnia, (hoc est, ambitus ad ambitum) sunt ut AF ad IC.

[2. Figurarum rectilinearum similium circulis inscriptarum, latera homologa sunt inter se ut circulorum diametri.]

Lemma.

Polygona circulo inscripta in circulum desinunt. Fig. 8.
Inscribe quadratum ACBD. Cum hoc dimidium sit quadrati (f) circulo conscripti, erit majus dimidio circuli. Quare si hoc auferatur è circulo, auferetur plus quam dimidium. Deinde singulis arcibus bisectis in E, K, I, H, inscribe octogonum: & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G & F: erit CF (g) parallelogrammum, cujus cum p. 28. & 29. dimidium sit triangulum (h) CEA, erit hoc plus quam dimidium segmenti CEA. Eodem modo singula triangula AKD, DIB, &c. singulorum segmentorum plus sunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium segmentorum plus quam dimidia sunt. Hæc ergo [triangula] si ex illis [segmentis,] hoc est, ex residuo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento si inscribantur circulo polygona duplo semper plurium laterum, ostendam è residuo circuli semper auferri plus quam dimidium. Ergo residuum erit tandem (i) minus quocunque dato, ac proinde polygona inscripta tandem a circulo deficient quantitate minori data quacunque; hoc est, in circulum (k) desinent. Q. e. d. (f) Per sch. post 6. & 7. l. 4. (g) Per cor. p. 28. & 29. l. 3. (h) Per 41. l. 1. (i) Patet ex lem. 2. sch. post 11. l. 6. (k) Per defin. 6. l. 12.

[Haud absimili methodo demonstrari posset, polygona circulo circumscripta in circulum desinere. Verum cum hoc inter alia, nec non & ipsum Lemma precedens, in prop. 3. Theorematum ex Archimede selectorum contineantur, superfluum esset hic loci plura subjungere.]

PRO-

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. **C**irculorum proportio est duplicata proportionis diametrorum.

Polygonorum similium circulis sine fine inscriptorum proportio semper duplicata (a) est proportionis diametrorum. Atqui polygona circulis in infinitum inscripta, in circulos (b) definunt. Ergo per porisma universale sequens, etiam circulorum proportio duplicata est proportionis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

Porisma universale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inscribuntur, in ipsas definant; quam proportionem inter se semper habent inscripta, eandem habent & figuræ.

R Sit ratio X ad Z, ea quam inscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem C F figurarum A, B eandem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea, quæ figuris inscribuntur; sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quaedam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inscripta per hyp. definunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inscripta, quæ ab ipsis deficient (c) minori quantitate, quam R deficiat a figura A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quam R. (d) Per 8. Ergo C est ad B in (d) majori, quam R ad B; hoc est, (ut ponebatur,) quam X ad Z; hoc est, per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C est ad B in majori proportionem, quam ad F, erit B figura minor (e) sibi inscripto F, totum sua parte. Eodem modo ostendetur rationem B ad A non posse esse majorem ratione Z ad X, [hoc (f) est, rationem A ad B non esse minorem ratione X ad Z.] Ergo ratio A ad B æqualis est rationi X ad Z. Quod erat demonstrandum.

[Eadem methodo demonstrabitur, duas figuras eandem inter se proportionem habere, quam semper habent circumscripta in illas definentia; hoc modo:

C F Sit ratio X ad Z ea quam circumscripta A B X Z semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea quæ figuris circumscribuntur; sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo

Ergo erit A ad aliam quandam quantitatem R , ipsa B maiorem, ut X ad Z . Et quoniam circumscripta per hypothesin desinunt in figuras A & B , erunt aliqua figuris A & B circumscripta, qua ipsas excedant quantitate (a) minori quam R (a) Per def. excedat figuram B . Sint ea C & F . Ergo F minus erit quam R . Ergo (b) ratio A ad F major est ratione A ad R ; (b) Per 8. hoc est, ratione X ad Z , sive C ad F . Quoniam igitur ratio A ad F major est ratione C ad F , figura A major (c) erit sibi (c) Per 10. circumscripto C , pars toto, quod est absurdum. Non igitur est ratio A ad B major ratione X ad Z . Eodem modo ostendetur rationem B ad A non esse ratione Z ad X maiorem, & (d) proinde rationem A ad B non minorem esse ratione X ad Z . Si itaque ratio A ad B neque major neque minor est ratione X ad Z ; erit ei aqualis. Q. E. D.

Corollaria ad Prop. II.

Cor. 1. Hinc, ut circulus est ad circulum, ita polygonum in illo descriptum erit ad simile polygonum in hoc descriptum. Utraque enim sunt in duplicata ratione diametrorum quæ sunt in circulis.

Cor. 2. Hinc etiam liquet circulos esse ad se invicem, in ratione radiorum suorum (e) duplicata; hoc est, ut (f) quadrata radiorum. (e) Per 15. & 34. l. 5.

Cor. 3. Hinc etiam, circulorum quorum diametri vel semidiametri sunt notæ, proportio innotescit; (g) inveniendi nimirum diametris datis tertiam proportionalem, ad quam circuli primi diameter eandem (h) habebit rationem, quam habet circulus iste primus ad secundum. Sit circuli primi diameter pedum quatuor, secundi pedum sex; cum sint 4, 6, 9 continue (i) proportionales, erit circulus primus ad secundum ut 4. ad 9. (g) Per sch. post 20. l. 6. (h) Per hanc prop. & def. 19. l. 5. (i) Per cor. 3. pr. 17. l. 6.

Cor. 4. Hinc etiam, circulum quemvis in data ratione augere vel minuere licet, uti supra (k) notatum est. Proponatur circulum describere qui sit alterius dati quintuplus; sitque dati circuli radius AB ; inter quem, & rectam BC , ipsius AB quintuplam inveniatur media proportionalis BX . Circulus radio BX descriptus erit circuli dati quintuplus. Fig. 56. l. 6. (k) Vide cor. 4. pr. 20. l. 6.

Cor. 5. Si quatuor rectæ fuerint proportionales; figura similes rectilineæ, similiterque descriptæ super duabus rectis prioribus, proportionales erunt circulis quorum diametri vel semidiametri fuerint duæ posteriores. Nam cum rectæ data sint proportionales; & cum tam figura rectilineæ, quam circuli sint in earundem rectarum ratione duplicata; erunt etiam figura circulis (m) proportionales. (l) Per 20. l. 6. & 2. l. 12. (m) Per 34. Cor. 6. l. 5.

Cor. 6. E converso, si duae figurae similes rectilineae duobus circulis proportionales fuerint; erunt homologa rectilinearum latera, circulorum diametris proportionalia. Cum enim ratio-

(a) Per 20. nes figurarum & circulorum aequales, duplicata (a) sint rationum homologorum laterum & diametrorum respective, (b) 12. erunt etiam haec rationes aequales.

(b) Per 35. l. 5.

Cor. 7. Hinc si detur circulo dato A aequale quadratum Q ; invenietur aliud quadratum X quod alteri cuivis circulo C aequale sit. Nam cum ex hypothesi sit A ad Q , ut C ad X , erit permutando, A ad C ut Q ad X ; & proinde (per cor. 5.) radius circuli A ad radium circuli C , ut latus quadrati Q ad latus quadrati X . Cum igitur dentur circulo-

(c) Per 12. l. 6.

rum radii, & latus quadrati Q , (c) invenietur latus quadrati X , & proinde (d) ipsum X quadratum. Et quod in hoc

(d) Per 46. l. 1.

corollario de quadratis dictum est, idem de figuris rectilineis & 18. l. 6. similibus quibuscunque (e) dictum puta.

(e) Per 12. l. 6.

Fig. 76. l. 6. Cor. 8. Circulus super hypotenusa AB trianguli rectanguli

(f) Per cor. 2. pr. 8. l. 6.

ABC , aequalis est duobus circulis qui describuntur super AC , BC lateribus angulum rectum continentibus. Si enim ab angulo recto C demittatur hypotenusa perpendicularis CO , erunt

(g) Per idem. (h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5.

AB , AC , AO (f) $\div \div$; & itidem AB , CB , OB (g) $\div \div$. Est itaque circulus super AB , ad circulos super AC , CB , respective

(i) Per 24. l. 5.

ut est (h) AB ad AO , OB respective: & proinde, (i) circulus super AB ad circulos reliquos simul sumptos est, ut

AB ad $AO + OB$. Et cum sit $AB = AO + OB$, erit etiam circulus super AB duobus reliquis simul sumptis aequalis.

Cor. 9. Hinc datis circulorum quorumcunque diametris, facile est illorum summam vel differentiam exhibere, hoc est, circulum invenire, quocunque & quibuscunque circulis datis aequalem; vel circulum describere, cujus area circulorum quorumvis inaequalium differentia aequatur: eadem scilicet methodo, qua quadratorum summa vel differentia exhibetur in schol. p. 47. l. 1. quod vide. In demonstratione tantum pro p. 47. l. 1. citetur cor. 8. p. 2. l. 12.

Fig. 9. & 10. l. 12.

Cor. 10. Hinc etiam Lunularum conjugatarum quadraturam, quam primus docuit Hippocrates Chius, possumus derivare. Sit enim ABC triangulum rectangulum, & BAC semicirculus diametro BC , BNA semicirculus diametro AB , AMC semicirculus diametro AC descriptus. Est itaque semicirculus BAC semicirculis BNA & AMC (k) aequalis.

(k) Per cor. 8. hujus.

Si igitur spatium utrinque commune auferas, nimirum segmenta BA , AC , relinquentur duae lunulae BNA , AMC , utrimque lineis circularibus terminata, triangulo rectilineari BAC aequales. Quod si recta BA aequalis sit recta AC ; hoc est, si lunulae fuerint quadrantales, demissa perpendiculari

Fig. 10.

AO ad hypotenusam BC, erit triangulum BAO aequale lunula BNA, & triangulum COA aequale lunula CMA. 2 E. I.

Scholium 1.

Similia circulorum segmenta ABO, ILR sunt in dupli. Fig. 6. & 7. cata ratione diametrorum AF, IC, vel etiam in duplicata ratione rectarum AO, IR, quæ segmentorum arcubus subtenduntur. Bisectis enim arcubus ABO, ILR in B & L, ductisque rectis AB, BO; IL, LR; propter arcus bisectos, (a) Per 27. subtense (a) æquales erunt, nempe $AB = BO$, & $IL = LR$: l. 3. Sed & ang. ABO = (b) ang. ILR. Similia igitur (c) sunt tri- (b) Per cor. angula ABO, ILR; atque adeo sunt in duplicata (d) ratione 2. pr. 33. l. laterum AB, IL, sive (e) diametrorum AF, IC quæ sunt in 6. circulis, vel etiam subtensarum AO, IR. Et continua arcu- (c) Per 6. um AB, BO; & IL, LR bisectiōe, figuræ polygonæ similes l. 6. perpetuo inscribentur iisdem segmentis, & super iisdem basibus (d) Per 19. AO, IR, in ipsa segmenta tandem desinentes; atque igitur (f) l. 6. ipsa segmenta ABO, ILR erunt in duplicata ratione diame- (e) Per cor. trorum AF, IC; vel in duplicata ratione subtensarum AO, 2. pr. 1. l. IR. 2. E. D. 12. (f) Per pa- risma univ.

Scholium 2.

CUM quadratura lunularum conjugatarum quarumcun- que conjunctim, quadrantalium vero seorsim, in coroll. 10. ostensa sit; liceat jam alia quadam de lunula quadrantali, de quadratura portionis ejusdem, deque methodo eam in data ratione secandi subjungere.

1. Compleatur Lunulæ quadrantalibus circulus minor, & (g) Fig. 11. transibit ejus circumferentia per circuli majoris centrum O. Si (g) Per cor. jam in arcu lunulæ exteriori BNA sumatur quodvis punctum 2. p. 9. l. 4. E, junctæ OE secabit arcus lunulæ proportionaliter in E & D, & proinde lunulam secabit in portiones (h) AED, BED. (h) Per def. 7. l. 12. Cum enim angulus BOE sit ad centrum circuli majoris & ad circumferentiam circuli minoris, arcus BE (i) erit duplo plurium (i) Sequi- graduum quam arcus BD; & proinde semiperiphæria BEA est tur ex cor. 4. ad quadrantem BDA, ut arcus BE ad arcum BD, sive, (k) ut l. 4. arcus EA ad arcum DA. Et permutando, arcus BE est ad (k) Per 16. arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA. & 17. l. 5.

2. Si arcus EB, EA fuerint æquales, hoc est, si punctum E Fig. 11. & coincidat cum N, medio puncto semicirculi BNA; ductæ rectæ 12. NB, NA perficient quadratum NAOB circulo minori inscriptum, & circulum majorem tangent in B & A. Cum enim BNA semiperiphæria circuli minoris bisecta sit in N, erunt rectæ

- (a) Per 6. recta NB, NA arcus quadrantal chorda, sive latera (a) quadrati circulo minori inscriptibilis. Et propter aequales majoris circuli radios BO, AO, erunt hi etiam in semicirculo BOA, reliqua duo quadrati, circulo minori inscriptibilis, latera.
- (b) Per def. 32. l. 1. Quare, cum omne quadratum sit (b) rectangulum, anguli NBO, NAO erunt recti, & propterea recta NB, NA circum majorem tangent (c) in B & A.
- (c) Per 16. l. 3. Fig. 11. 3. Si vero arcus EB, EA fuerint inaequales, etiam subtensa (d) Per cor. EB, EA (d) inaequales erunt; & si EA major sit quam EB, p. 27. l. 3. propter angulum BEA in semicirculo rectum, (e) angulus EBA (e) Per cor. erit semirecto major, & angulus EAB semirecto minor; ac 18. p. 32. l. 1. proinde ang. EAO (sive EAB, semirecto BAO auctus) erit angulo recto minor. Recta igitur EA arcum circuli majoris quadrantalem BDA (f) secabit alicubi, ut in G.
- (f) Per 16. l. 3. 4. Ducta recta BG, hac trianguli rectanguli BEG basis, & arcus BDG subtensa erit, ut satis patet: atque anguli EGB, (g) Per 13. l. 1. EGB erunt aequales, nempe semirecti. Nam propter angulos (h) Per cor. AGB, EGB duobus (g) rectis aequales, atque angulum AGB 1. p. 8. & 9. in segmento quadrantali (h) sesquirectum, erit angulus EGB l. 4. semirectus, & propter angulum GEB rectum, erit (i) etiam (i) Per cor. angulus EBG semirectus.
6. p. 32. l. 1. 5. Basis BG trianguli rectanguli aequicruris EBG, a recta EO bifariam & perpendiculariter secatur. Angulus enim BEO (k) Per cor. super arcu quadrantali BO circuli minoris, (k) est semirectus, 1. p. 8. & 9. & proinde angulus rectus BEG a recta EO bifecatur. Sed l. 4. angulus BEG est trianguli isoscelis angulus verticalis: unde recta (l) Per n. 3. illum bifecans, (l) bifecabit etiam basem BG in F, eique perpendicularis erit. schol. p. 26. l. 1.
6. Triangula itaque BFE, GFE sunt sibi ipsis, & toti BEG, atque etiam triangulo BOA similia. Singula enim sunt triangula rectangula isoscelia, seu quadratorum dimidia.
- (m) Per def. 10. l. 3. 7. Cum BF sit ipsi DO (circuli majoris radio) perpendicularis, (m) erit illa sinus rectus arcus BD; & proinde (n) (n) Per cor. dupla BF, sive BG, subtensa erit dupli arcus BD, sive BDG. pr. 30. l. 3. Supra autem (n. 1.) ostensum est, arcum BE in circulo minore, duplo plurimum graduum esse quam est arcus BD in (o) Per def. 4. l. 6. circulo majore. Ergo arcus BDG (nempe ipsius BD duplus) similis (o) erit arcui BE, & segmentum BG simile segmento BE.
8. Portio lunulae BED aequalis est triangulo rectilineo (p) Per sch. 1. hujus. BEF. Segmenta enim similia BE, BG sunt (p) in duplicata ratione diametrorum BA, BC, hoc est, (q) ut 1 ad 2; ac (q) Per sch. p. 20. l. 6. proinde semisegmentum BDF est segmento BE aequale. Si itaque cor. 1. p. 47. l. 1. que e portione BED subtrahatur segmentum BE, & ei aequale semisegmentum BDF addatur, habebitur triangulum rectili-

neum BEF portioni BED aequale; ac (a) proinde quadratur (a) Per def.
portio BED lunula quadrantal. 8. l. 12.

9. Lunulam quadrantalem ADBN secundum rationem datam (scil. PQ ad QR) dividere in portiones AED, BED; (b) Per 9. l. 6.
& utriusque portiones quadraturam exhibere. Diametrum (c) Per n. AB semicirculi minoris AEB divide (b) secundum rationem 6. hujus. datam in I, & in eodem semicirculo, a puncto I, erigatur diametro BA perpendicularis IE; atque a puncto E ad O centrum l. 6. circuli majoris, ducta recta EO lunulam in data ratione dividet. Similia (c) enim triangu- (e) Per cor. la BAO, BEF, sunt in duplicata 2. p. 8. l. 6. (d) ratione laterum homologorum AB, BE, hoc est, (propter (f) Per def. AB, BE, BI $\div \div$ (e),) ut (f) AB ad BI; atque ducta IO, in (g) Per 1. eadem ratione (g) est triangulum BAO ad triangulum BIO, l. 6. propter eandem altitudinem ad O. Cum igitur triangulum (h) Per 11. BAO ad triangu- (h) rationem habeat; erit l. 5. la BAO = (i) triang. BEF = (k) portioni BED. Sed lunula (i) Per 9. tota triangulo BAO (l) aequatur; atque adeo portio EAD l. 5. triangulo AIO (m) aquabitur. Est autem triangulum AIO (k) Per n. 8. ad triangulum BIO, (n) ut AI ad BI, sive ut PQ ad QR; (l) Per cor. & proinde portio lunula AED erit ad portionem BED ut 10. hujus PQ ad QR. Lunula itaque quadrantal. in data ratione prop. dividitur, & alio modo quadratura portiones BED exhibe- (m) Per ax. tur; unde tum eandem portionem triangulo BIO, tum portio- 3. l. 1. nem alteram AED triangulo AIO aequalem esse constat. Da- (n) Per 1. tur itaque portiones utriusque quadratura. l. 6.

10. Completo utroque circulo ABC, AOBN, ducatur dia- Fig. 12.
metro minoris BA parallela majoris diameter EF, eique ad rectos angulos circuli majoris diameter CD, qua producta, tum lunulam ANB in duas aequales portiones, AND, BND, tum triangulum AOB in duo aequalia triangu- la AHO, BHO, toti & sibi invicem similia dividet. Dico quod spatii luniformis AGOIBECFA cornua AGOF, BIOE, triangulis AHO, BHO, (& (o) proinde lunula quadrantal. portionibus AND, (o) Per n. BND) respective aequalia sunt. Nam propter ABq = (p) AOq 9. hujus. + BOq = 2AOq, erit (q) segmentum ADB segmenti AGO du- (p) Per 47. plum, atque semisegmentum ADH segmento AGO aequale; l. 1. qua si a circuli majoris octantibus aequalibus AOD, AOF (q) Per sch. auferantur, remanebunt aequalia AHO, AGOF. Et simili 1. hujus, & modo ostendetur BHO = BIOE. Quadrantur itaque dicti schol. p. 20. spatii luniformis cornua AGOF, BIOE. l. 6.

11. Isuam positam, in circulo minore compleatur quadratum BNAO, & centro N. radio NB vel NA (= (r) OB vel OA) (r) Per def. describatur arcus quadrantal. BLA, eritque BLAO lu- 32. l. 1.
nula quadrantal. lunula BNAD similis & aequalis, ac pro- (f) Per cor. inde triangulo BNA vel BOA (f) aquabitur. Sed cornua 10. hujus. BIOE, prop.

- (a) *Per n.* BIOE, AGOF simul sumpta eidem triangulo (a) aquantur.
 10. Ergo spatium mixtilineum BLAFE duplici triangulo BOA, sive quadrato BNAO aequale est.]

PROPOSITIO III. & IV.

Sunt prolixæ & difficiles tyronibus, nec aliam habent usum, quam ut per eas demonstretur quinta, quam nos sine illis multo facilius demonstrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

- Fig. 13.* **S**I duæ pyramides triangulares secantur planis (OSE, RXZ) ad bases (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter se ut bases (ACB, IQV.)

- Quoniam parallela plana OSE, ABC secantur a planis BFC, AFB, AFC; erunt sectiones communes SE, BC, & (a) *Per 16.* OS, AB, & OE, AC (a) parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales (b) sunt.
 l. 11. (b) *Per 10.* Quare sectiones OSE, ABC (c) sunt similes. Eodem modo (c) *Per 4.* similes esse ostendam sectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio sectionis ABC ad OSE est duplicata (d) rationis laterum BC, l. 6. SE; & ratio sectionis IVQ ad RXZ duplicata est ratio-
 (d) *Per 19.* nis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ
 l. 6. sunt eadem: (est enim BC ad SE, ut (e) CF ad EF; hoc
 (e) *Per cor.* est per hyp. ut QL ad ZL; hoc (f) est, ut VQ ad XZ.)
 1. p. 4. l. 6. (f) *per idem* Ergo ratio ABC ad OSE eadem est (g) cum ratione IVQ
 cor. ad RXZ. Quod erat propositum.
 (g) *Per 34.*
 l. 5.

II.

- Fig. 14.* **P**Yramidi (ZCAF) triangularem habenti basim, prismata in infinitum inscripta, desinunt in ipsam pyramidem.
 Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B, G, factis sectionibus BEP & GDN basi ZAC parallelis, inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi esse circumscripta

scripta prismata CIBA, PXGB, NHFG. Excessus circumscriptorum supra inscripta, sunt solida IM, XK, HG; quæ simul sumpta æquantur prismati CIBA. Nam HG est (a) æ- (a) *Per 25.* quale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB, hoc l. 11. est (b) MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti (b) *Per eand.* CIBA. Atqui si AF in plures sine fine partes æquales dividatur, ac proinde prismatum numerus in infinitum multiplicetur; AB fiet (c) quavis data minor. Ergo etiam (d) (c) *Collig. ex lem. 2. schol.* prisma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo prismatum circumscriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ post 11. l. 6. pars est prismatum sibi circumscriptorum) excessus supra (d) *Patet ex 25. l. 11.* inscripta prismata, fiet quovis dato minor. Ergo inscripta prismata in pyramidem (e) tandem desinant. Quod erat (e) *Per def. 6. l. 12.* demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Piramides triangulares aequæ altæ, eam inter se *Fig. 15.* proportionem habent quam bases (AQR, ESX.)

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, sed æque multas, utrimque divisit, factisque per divisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æque multa & æque alta. Jam vero quia prismata LA, IE sunt æque alta, erit prisma LA ad prisma IE, ut (f) basis LOB ad basim INK; hoc est; (g) (f) *Per cor. 1. p. 34. l. 11.* ut basis QRA ad basim SXE. Eodem modo ostendam singula prismata pyramidi QPAR inscripta, esse ad singula (g) *Per lem. 1.* inscripta pyramidi SZEX, ut basis QAR ad basim SEX. Ergo etiam (h) simul omnia sunt ad omnia, ut basis ad (h) *Per 12. l. 5.* basim. Quare cum ea tandem desinant (i) in ipsas pyramides, etiam ipsæ erant (k) ut bases. Quod erat demonstrandum. (i) *Per lem. 2.*

[Demonstratio supponit latera AP, EZ pyramidum, æquales earum altitudines exhibere, & proinde esse ad bases QAR, SEX recta. Sed vim suam retinebit demonstratio, quamvis (k) *Per por. 1. p. 34. l. 11.* latera illa sint ad bases quovis modo obliqua, si concipiantur a verticibus P, Z perpendiculares ad bases demitti, & in æquales quotcunque partes, & æque multas utrinque dividi, & per divisionum puncta transire supponantur plana basibus parallela; quæ itaque rectas PA, ZE dividunt (l) in partes si- (l) *Per 17. l. 11.* miles; & numero æquales iis in quas dividuntur perpendicu-
lares,

lares, eademque plana bases erunt prismatum aque multorum & aque aliorum, utrique pyramidi inscriptorum; & proinde, eodem modo procedet demonstratio, ac si recta PA , ZE fuissent ipsa basibus QAR , SEX perpendiculares.]

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. & 17. **P**Yramides quacunque aque alta, eam inter se rationem habent quam bases (AB , CFO .)

Resolvantur bases in triacula A , B , C , F , O ; pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX est (a) *Per præc.* ad pyramidem OZ , ut (a) A ad O ; & pyramis (b) BX est (b) *Per eand.* ad pyramidem OZ ut B ad O . Ergo pyramides simul AX , (c) *Per 24.* BX (hoc est tota ABX) sunt ad pyramidem OZ , ut A , B l. 5. (c) simul ad O . Eodem discursu pyramis ABX est ad pyramidem FZ , ut (d) A , B est ad F : Et ABX est ad CZ , ut (e) *Per præc.* (e) A , B est ad C . Ergo ABX (f) est ad tres simul OZ , & 24. l. 5. (f) FZ , CZ , hoc est, ad totam pyramidem $OFCZ$, ut A , B ad l. 5. O , F , C . Quod erat demonstrandum.

[Corol. Hinc sequitur, pyramides quascunque aequalium basium & altitudinum, aequales esse.]

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eandem basim & altitudinem.

Fig. 18. Sit primo pyramis trigona $BGAC$, in eadem basi & altitudine cum prisma $BACFEO$. Ducantur BF , AO , AF . (g) *Per 34.* Triacula BFC , BFO sunt (g) paria. Ergo pyramis $BFCA$ l. 1. pyramidi $BOFA$ (h) æqualis est. Ob eandem causam pyramis (h) *Per cor. præced.* $OEAF$ par est pyramidi $OBAF$, hoc est pyramidi $BOFA$, sunt enim eadem pyramides. Igitur etiam $BFCA$, & $OEAF$ æquales sunt. Omnes igitur tres $BFCA$, $OEAF$, $OBAF$, sive $BOFA$ sunt pares. Ergo tres simul unius $BFCA$ triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma $BACFEO$. Illud ergo pyramidis $BFCA$, hoc est (i) $BGAC$, triplum est. (i) *Per cor. præced.* Quod erat demonstrandum.

Fig. 19. Sit deinde pyramis quævis eandem habens basim & altitudinem cum prisma $AEFH$. Ducitis lineis BC , BO , BE , & NI , NG , NH , resolve prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonstratio

monstratio ex prima parte. Nam singulæ partes prismatis [polygoni,] triplæ erunt singularum partium pyramidis [polygonæ; hoc est, singula prismata triangularia singularum pyramidum triangularium tripla erunt.] Ac proinde totum prisma [polygonum] totius pyramidis [polygonæ] triplum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio Fig. 20.
est triplicata ejus, quam habent homologa latera
(AB, HN.)

Sint primo trigonæ. Perfectis parallelogrammis AM & HQ, super his constitue parallelepipeda AG, HL, in altitudinae pyramidum; quæ cum pyramides sint similes, etiam patet similia (a) esse. Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, (a) Ex defin. 9. l. 11.
item per RP, IN secabuntur (b) parallelepipeda in duo prisma- (b) Per 28. l. 11.
mata æqualia. Singula horum (c) tripla sunt pyramidum (c) Per præc. l. 6.
OACB, & KHIN. Utraque ergo simul, hoc est, tota parallelepipeda AG, HL, sextupla sunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales sunt. Sed horum ratio (d) triplicata est rationis laterum AB, HN. Ergo & (d) Per 33. l. 11.
illarum. Quod erat demonstrandum.

Quod si pyramides similes fuerint polygonæ, resolvantur in Fig. 21.
triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (e) (e) Ex 20. l. 6. &
ostendes etiam AR ipsi OK, & BR ipsi EK, & CR ipsi FK (f) ex defin. 9. l. 11.
esse similes. [Ob similia enim triangula (f) A, O; & (g) MI, MR:: ZP: (g) l. 11.
MIR, ZPK, (h) erit DM: MI:: ZV: ZP; & MI: MR:: ZP: (h) Per 20. l. 6.
ZK. Ergo (i) DM: MR:: ZV: ZK; & invertendo (k) MR: MD:: ZK: ZV. Eodem modo ostendetur esse MD: RD: ZV: (g) Per def. VK. Ergo (l) MR: RD:: ZK: VK. Similia (m) sunt igitur 9. l. 11.
triangula MRD, ZKV, & proinde etiam pyramides AR, OK, (h) Per def. 1. l. 6.
qua similibus triangulis multitudine æqualibus continentur, si- (i) Per 22. l. 5.
miles (n) sunt. Eodem modo, ob similia triangula B, E; vel (k) Per sch. 16. l. 5.
C, F, demonstrabitur triangula DXR, VSK similia esse, at- (l) Per 22. l. 5.
que adeo pyramidem BR ipsi EK, & CR ipsi FK similem esse.] Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK est
triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR, EK triplicata est rationis MX ad SZ; hoc est denuo per hyp. (m) Per 5. l. 6.
rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK est tri- (n) Per def. 9. l. 11.
plicata rationis XQ ad ST, hoc est, rursus IM ad PZ.
Cum ergo ratio singularum ad singulas sit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio (o) omnium ad omnes, (hoc est, (o) Per 12. l. 5.
ratio l. 5.

ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonstrandum.

Fig. 21.

[Corol. Hinc, si fuerint quatuor rectæ continue proportionales; erit prima ad quartam, ut est pyramis super prima, ad pyramidem similem similiterque descriptam super secunda; & proinde, datis pyramidum similium ABCR, OEFK lateribus homologis MX, ZS; si fiant MX, ZS, G, H continue proportionales, erit pyramis ABCR ad pyramidem OEFK, ut MX est ad H.]

PROPOSITIO IX.

Fig. 22. &
23.

Æ Quales pyramides reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æquales.

1. Pars. Sint primo [*æquales*] pyramides trigonæ BACO, HKNL. Perfectis parallelogrammis BE, HR, super his sint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut ostendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium sextupla, ac proinde æqualia inter se. Sunt vero horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eadem quæ pyramidum: bases vero BE, HR duplæ (a) sunt basium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur, ob parallelepipedorum æqualitatem, sit ut BE ad HR, ita (b) reciproce HK ad BA; etiam erit ut basis BCO ad basim HNL, ita reciproce altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonstrandum.

- Quod si [*æquales*] pyramides habeant bases polygonas, re-tentis iisdem altitudinibus (c) reducantur ad trigonas, erunt-que hæ illis æquales per [*cor. p.*] 6. Sed pyramides sic re-ductæ, per jam demonstrata, reciprocant bases & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant bases & altitudines. Quod erat demonstrandum.

2. Pars. [Si bases sint trigonæ,] quoniam jam ponitur esse BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR, ut HK ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP (d) sunt æqualia. Ergo & sextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonstrandum.

- [Quod si pyramides habeant bases polygonas altitudinibus reciprocas; reducantur illa ad (e) bases trigonas BCO, HNL polygonis æquales. Erit igitur BCO ad HNL, ut HK ad BA, atque adeo pyramides hæ trigonæ æquales erunt per jam demon-strata: ergo etiam pyramides polygonæ, quæ trigonis sunt (f) æquales, erunt etiam ipse æquales.]

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonstrata sunt p. 6. 8. 9. etiam
conveniunt quibuscunque prismatis; cum hæc tripla
(a) sint pyramidum eandem basim & altitudinem habentium. (a) Per 7.
l. 12.

Igitur

1. Prismaticum æque altorum eadem est proportio quæ
basium. Id enim ostensum est de pyramidibus p. 6.

2. Similium prismaticum proportio est triplicata propor-
tionis homologorum laterum. Id enim ostensum est de
pyramid. p. 8. [*Et proinde si dentur similium prismaticum
latera homologa, inuenietur prismaticum ipsorum ad se invicem
ratio, eodem modo quo ex iisdem datis, pyramidum ratio in-
venta est, in cor. p. 8.*]

3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines: &
quæ reciprocant, sunt æqualia. Id enim de pyramidibus
ostenditur p. 9.

Mirum est hæc ab Euclide prætermissa, cum præcipua
sint, quæ de solidis rectilineis tradi possunt.

Scholium 1.

EX hætenus demonstratis elicietur dimensio quorumcun-
que prismatum ac pyramidum.

Prismatis soliditas producit ex altitudine in basim ducta;
pyramidis vero ex tertia altitudinis parte ducta in basim.

Ut si prismatis altitudo sit 5. pedum, basis vero 25.
pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125.
pedes cubici pro soliditate prismatis.

Esto enim prisma polygonum AH. Ejus basi AE intelli-
gatur æquale esse triangulum BAC, superque eo prisma BE
æque altum ac AH. Erunt (b) BE, AH æqualia prismata. (b) Per cor.
Sed BE prisma (c) producit ex altitudine sua in basim
BAC, hoc est (d) AE. Ergo etiam prisma AH fit ex alti-
tudine sua, quæ altitudini prismatis BE æqualis ponitur, in
basim AE. (c) Per sch. 1.
(d) Per cor.
fr.

Hinc vero & ex 7. patet demonstratio partis secundæ.

[Scholium 2.

Dimensio pyramidis truncatæ ABCESO, ex datis Fig. 13.
altitudine CE, basibus parallelis ABC, OSE.
earumque lateribus homologis BC, SE.

R 3

Ut

Ut inveniatur EF altitudo partis deficientis ESOE; propter sim. tri. BCF, SEF, erit $BC:SE::CF:EF$. Et divid. $BC-SE:SE::CE:EF$. Datis itaque BC, SE & CE, invenietur EF. Atque hæc quidem demonstratio supponit altitudinem perpendicularem cum latere pyramidis coincidere; sed utique cadat perpendicularis illa, planum OSE (si opus, continuatum) altitudinem pyramidis & latus ejus EC similiter secabit; & proinde semper erit $BC-SE$ ad SE, ut altitudo pyramidis truncata, ad altitudinem partis deficientis. Cujus altitudinis sic inventa pars tertia in basem minorem OSE ducta, dabit partis deficientis ESOE soliditatem. Inventa autem altitudini partis deficientis, addatur altitudo data pyramidis truncata, & habetur altitudo pyramidis integra; cujus altitudinis pars tertia in basem majorem ducta, pyramidis integræ soliditatem dabit: e qua, deducta pars deficientis, pyramidem truncatam relinquet.]

Lemma ad P. 10.

PYramides & prismata, quæ conis & cylindris in infinitum inscribuntur, in conos & cylindros desinunt.

Demonstratur ut lemma propositionis 2. adminiculo propositionis 6. & corollarii 1. post p. 9. si ut istic plana circulo inscripta, ita hic pyramides & prismata, quæ super planis illis tanquam basibus consistunt, a cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Fig. 24. **O**Mnis conus tertia pars est cylindri eandem basem & altitudinem habentis.

Basi CL intelligatur inscribi polygonum regulare quocunque laterum, & super illo tanquam basi, cono quidem pyramis, cylindro autem prisma inscribi. Erit pyramis (a) tertia pars prismatis. Et si rursus inscribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, superque eo inscribatur cono pyramis, & cylindro prisma; iterum erit pyramis tertia pars prismatis; Atque hoc semper eveniet. Quare cum pyramides in conum, (b) prismata in cylindrum desinant, etiam (c) conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 7.
l. 12.

(b) Per lem.
prac.
(c) Per porif.
univ. post
2. l. 12.

[Scholium. Notandum vero est, hanc propositionem & sequentes duas, non solum ad rectos conos & cylindros, verum etiam

etiam ad quosunque obliquos pertinere, quamvis figura rectos tantum exhibeant. Deducuntur enim a similibus pyramidum & prismatum quorumcunque, non a rectorum solum proprietatibus.]

PROPOSITIO XI.

Conorum æque altorum (BAF , QXR) proportio eadem est quæ basium (CL , SE .) Idem ^{Fig. 24. & 25.} accidit cylindris æque altis.

Pyramides conis æque altis inscriptæ, sunt (a) ut bases. (a) Per 6. Atqui (b) pyramides tandem in conos definunt. Ergo etiam ^{l. 12.} (c) conis sunt ut bases. Cum vero cylindri conorum eadem cum ipsis basium & altitudinem habentium sint tripli; ante 10. etiam ipsi erunt ut bases. Quod erat demonstrandum. (c) Per porisf. univ.

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur etiam prismata & cylindros æque alta esse inter se ut bases, imo quælibet corpora cylindriciformia æque alta, hoc est, quæ producuntur ex quibuscunque planis in eandem altitudinem ductis, esse inter se ut bases. Eodem modo de pyramidibus & conis æque altis, & conicis quibuscunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Conorum similium (BAF & QZR) proportio est triplicata proportionis diametrorum (BF & ^{Fig. 24. & 25.} QR) quæ sunt in basibus. Idem cylindris similibus accidit.

Similium conorum basibus inscribe polygona ordinata [eiusdem denominationis,] quæ proinde similia erunt. [Si vero similes conis fuerint scaleni, ita eorum basibus inscribantur polygonæ, ut axium inclinatio eundem habeat situm respectu laterum vel angulorum utriusque polygoni.] Pyramides super his polygonis inscriptæ conis, etiam similes sunt; ^{(d) Per 8. l. 12.} quod facile ostenditur. Ergo earum proportio est triplicata ^{(e) Per cor. 2. p. 1. l. 12.} (d) proportionis laterum BL , QE ; hoc est, ^{(f) Per lem. ante 10. l. 12.} (e) proportionis BF , QR . Quare cum pyramides ^{(g) Per porisf. univ.} (f) in conos definant, etiam conorum proportio ^{(g) Per porisf. univ.} (g) est triplicata proportionis diametrorum BF , QR . Quod erat demonstrandum.

De cylindris patet theorema, cum sint tripli conorum.

[Corol. Si continuetur ratio diametrorum BF , QR quae sunt in basibus conorum (vel cylindrorum) similium, per terminos G , H ; ut sint BF , QR , G , H ::; Erit (a) ut BF ad H , ita conus BAF ad conum QZR , & ita cylindrus BM ad cylindrum RI .]

(a) Per def.
10. l. 5.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 16.

SI cylindrus (BI) secetur plano (RL) basibus (BQ , CI) parallelo; erit pars (BL) ad partem (RI) ut axis segmentum (AO) ad segmentum axis (OF .)

Demonstratur ut prima sexti.

Theorema eodem modo verum est de superficie.

[Dividatur enim axis OF in quotcumque partes aequales, & per singula divisionum puncta ducantur plana basibus RL , CI parallela, & dividetur cylindrus (atque etiam superficies cylindrica) RI in partes numero aequales iis in quas dividitur axis OF ; quarum singulae, aequales ipsius OF partes pro axibus habentes, erunt cylindri ejusdem altitudinis; & proinde cylindri in quos dividitur cylindrus RI erunt (b) ut bases, hoc est, aequales: (quod autem cylindrica superficies ista in quas dividitur superficies cylindrica RI , sint etiam aequales, constabit ex eo quod una quavis intra alteram quamvis posita, illi ex- amussim congruet: & eodem modo parvulorum cylindrorum aequalitas iterum constabit.) Ergo cylindrus (& cylindrica superficies) RI dividitur in partes aliquotas similes iis in quas dividitur axis OF . Si itaque ex axe OA accipiaturs una pars aliquota axis OF quoties poterit, & per puncta partes illas ipsius AO connectentia, ducantur plana oppositis planis BQ , RL parallela; manifestum est, toties in antecedente AO axe contineri partem aliquotam consequentis axis OF , quoties in antecedente BL cylindro (vel superficie cylindrica) continetur pars similis aliquota consequentis cylindri (vel superficiei cylindricae) RI . Ergo (c) axis AO est ad axem OF , ut cylindrus BL ad cylindrum RI ; (vel etiam, ut superficies cylindrica BL ad superficiem cylindricam RI .) Q. E. D.

(b) Per 11.
l. 12.

(c) Per rationum aequalitatem in-
divisum.

Schol. Hec propositio non minus valet in obliquo cylindro quam in recto: in eo enim casu, partes aliquota axis OF , ad bases suas similiter inclinantur in parvulis istis cylindris, in quas dividi supponitur cylindrus RI a planis ad bases parallelis

lis; unde dup quivis intra invicem positi congruent, & proinde tam cylindruli quam eorum superficies, partes erunt aliquota cylindri & superficiei RI, partibus aliquotis axis OF numero aequales; & proinde ex cylindro vel superficie cylindrica BL toties sumi possunt, quoties partes axis OF ex axe OA. Unde demonstratio omnino eadem erit in cylindro obliquo ac in recto.

Corol. Hinc, si cylindrus secetur plano basibus parallelo; erunt etiam partes BL, RI ut earum altitudines. Si enim cylindrus sit rectus, res patet; altitudines enim ab axis segmentis AO, OF non sunt diversa: si vero fuerit obliquus, ducatur recta linea basibus perpendicularis, ac manifestum est illam atque axem a plano basibus parallelo similiter (a) se- (a) Per 17: cari; & proinde, cum partes BL, RI sint (b) ut axis segmen- l. 11. ta, erunt etiam ut segmenta perpendicularis, hoc est, ut (b) Per sch. hujus pr. snipsarum altitudines. Q. E. D.]

PROPOSITIO XIV.

Cylindri (CI & AR) super basibus (GH, MQ) Fig. 27. & aequalibus, sunt inter se ut altitudines (SF, LZ.) Idem conis accidit.

Abscinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO, altitudinis LE ejusdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI (c) æ- (c) Per 11. quales sunt. Cum igitur cylindrus AO sit ad cylindrum l. 12. cum AR, ut (d) LE ad LZ; etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ; schol. p. 10. hoc est, (quia LE & SF (e) æquantur,) ut SF ad LZ. l. 12. Quod erat demonstrandum. (d) Per cor. præc.

[Porro, cum sit cylindrus CI ad cylindrum AR, ut SF ad (e) Per con- LZ; erit etiam pars tertia cylindri CI ad partem tertiam cy- str. lindri AR, hoc est, (f) conus CFT ad conum AZB, ut SF (f) Per 10. l. 12. ejus- ad LZ. que schol.]

Observent tyrones, hujus propositionis demonstrationem aequa- valere in cylindris & conis obliquis ac in rectis.]

Corollarium.

Theorema etiam verum est de prismatis; itemque de pyramidibus; & demonstratio plane similis. Sed de prismatis ex corol. 1. p. 9. l. 12. & 25. l. 11. ejusque coroll. cum cor. 1. p. 24. De pyramidibus ex hoc & ex 7. l. 12.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Fig. 28. &
29.

Æ Quales cylindri (AR , DF) reciprocant bases & altitudines; & si reciprocant, æquales sunt. Idem conis accidit.

Demonstratur ut P. 34. l. 11. sed pro 32. & 25. isthic citatis, hic adhibebitur prop. 11. & 13. [vel 14.] lib. 12.

[1. Pars. Sint primo cylindri recti: si fuerint æque alti,

(a) Per 11. bases (propter cylindros ex hypothesi æquales) erunt (a) æquales; l. 12. unde in eo casu, res patet.

Si vero altitudines fuerint inæquales, a majori LZ abscinde LE minori QC æqualem, & per E duc planum XO ad MQ

(b) Per eand. parallellum. Basis MQ est ad basem VT , (b) ut cylindrus AO ad cylindrum FD ; hoc est. (quia cylindri AR , FD æquales esse supponuntur,) ut cylindrus AO ad cylindrum AR ; hoc est,

(c) Per 14. (c) ut altitudo LE ad altitudinem LZ ; hoc est. (propter LE , l. 12. QC æquales) reciproce ut altitudo QC ad altitudinem LZ . Q. E. D.

Sint autem cylindri quovis modo obliqui, & erigantur super iisdem basibus & in eadem altitudine cylindri recti; eruntque

(d) Per 11. his æquales (d) obliqui. Quare cum æquales cylindri recti l. 12. & sch. reciprocant bases & altitudines; etiam æquales obliqui reciprocabunt. Q. E. D.

(e) Per 10. Cum vero æquales conis sint (e) æqualium cylindrorum æque l. 12. altorum & super iisdem basibus partes tertia; hi etiam bases & altitudines reciprocabunt.

2. Pars. Sint cylindrorum rectorum altitudines inæquales, & (f) Per 11. de majori LZ sume minori QC æqualem LE , & per E ducatur l. 12. planum XO basi parallellum. Cylindrus AO est ad cylin-

(g) Per con- drum FD , (f) ut MQ ad VT ; hoc est per hypothes. ut QC l. 12. (g) sive LE ad LZ ; hoc (h) est, ut AO ad AR . Ergo (i)

(h) Per 14. cylindri AR , FD sunt æquales. Et cum cylindri obliqui sint l. 12.

(i) Per 9. rectis æque altis & super iisdem basibus (k) æquales; hi etiam, l. 5. si reciprocant bases & altitudines, æquales erunt. Q. E. D.

(k) Per 11. Coni autem, cum sint (l) tertia partes cylindrorum æque l. 12. & sch. altorum super iisdem basibus, si reciprocant bases & altitudi- post 10. l. nes, erunt & ipsi æquales. Q. E. D.] l. 12.

(l) Per 10. l. 12.

Scholium.

CUM nihil attulerit Euclides de ratione composita in corporibus, eam breviter hoc loco demonstrabimus.

1. Cylia-

1. Cylindrus ad cylindrum, & prisma ad prisma, rationem habent compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Sunto cylindri FD & AR: ab altiori AR (nam in α -Fig. 29. & que altis res per se patet (a); abscinde AO æque altum ac 28. FD. Sit etiam ut basis VT ad basim MQ, ita FN ad X; (a) Per 11. & ut altitudo ND seu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. l. 12. Oportet igitur ostendere, cylindrum FD esse ad cylindrum AR, ut FN est ad Z. Cylindrus FD est ad cylindrum AO, ut (b) basis VT ad basim MQ; hoc est, (c) ut FN ad X: (b) Per 11. l. 12. cylindrus autem AO est ad cylindrum AR, ut (d) BO ad BR; hoc est, ut (e) X ad Z. Igitur ex (f) æquo, cylindrus FD est ad cylindrum AR, ut FN ad Z. (c) Per com- str. (d) Per 14. l. 12.

De prismatis res eodem modo demonstrabitur, sed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14. (e) Per com- str.

2. Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem. (f) Per 22. l. 5.

Sunt enim (g) cylindrorum ac prismatum partes tertiæ. (g) Per 10. & 7. l. 12.

[Hæc vero omnia in corporibus obliquis aque obtinent ac in rectis, uti ex antedictis satis patet.]

PROPOSITIO XVI, XVII.

Hæc propositiones omnium prolixissima, non alium usum habent, quam ut demonstretur P. 18. quam nos alia faciliori via demonstrabimus.

Lemma ad P. 18.

Cylindri hemisphærio inscripti, in hemisphærium desinunt. Sit PZY maximus hemisphærii semicirculus: sitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductisque per divisionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inscribantur semicirculo rectangula OBRK, EDHS, quibus deinde extra circulum continuatis, semicirculo circumscripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE; eruntque omnia æque alta. Excessus autem circumscriptorum supra inscripta sunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ simul sumpta conficiunt rectangulum FTYP. Nam quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE simul, æqualia rectangulo LB, hoc est OR. Quare si adjicias utrimque plana FK, TR, erunt simul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur semicirculus cum rectangulis circa radium immotum

Fig. 30.

immutum AZ circumagi, inscripta rectangula EH, OR producent cylindros hemisphærio inscriptos; & rectangula circumscripta producent cylindros hemisphærio circumscriptos, sibi mutuo insistentes: & sicut rectangulorum circumscriptorum excessus supra inscripta rectangula erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumscriptorum excessus supra inscriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus.

(a) Patet ex
14. l. 12.

Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis data minor; adeoque etiam ipse quovis dato (a) evadet minor, si radio in plures sine fine partes diviso, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus sine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumscriptorum, multoque magis ipsius hemisphærii, quod cylindrorum circumscriptorum pars est, excessus supra inscriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemisphærio in infinitum inscripti, tandem desinant (b) in hemisphærium. Quod erat demonstrandum.

(b) Per def.
8. l. 12.

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur cylindros cono, conoidi, sphæroidi, &c. inscriptos, in ipsa desinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 31.

Sphærarum proportio est triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)

Radiis AB, YR in quot placuerit æquales partes, sed æque multas, divisas, ductisque per divisionum puncta perpendicularibus, &c. Intelligantur maximis sphærarum semicirculis inscripta esse rectangula æque multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta, inscribant utrique hemisphærio cylindros æque multos, sibi invicem insistentes.

(c) Per cor.

1. p. 13. l. 6.

(d) Per def.

10. l. 5.

(e) Per

35. l. 5.

(f) Per

22. l. 5.

(g) Per def.

4. l. 12.

(h) Per

12. l. 12.

Quia KC (c) est ad CF, ut CF ut CB. Erit ratio KC ad CB duplicata (d) rationis KC ad CF, hoc est rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per constr. est KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam (e) FC est ad BC, ut XE ad ER. Sed BC est ad CO per constr. ut RE ad ES. Igitur ex æquo (f) FC est ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur (g) FL, XQ similes sunt, ac proinde eorum proportio est triplicata (h) proportionis diametrorum FI, XV, seu semidiametrorum FC, XE, quæ sunt in basibus. Sed proportio FC ad XE eadem est cum proportione quæ est inter diametros sphærarum

sphærarum BK, RZ; (nam ut jam ostendi, FC est ad XE, ut CO ad ES; hoc est, ut (a) BK ad RZ, ipsarum CO, (a) Per 15. ES per constr. æque multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ est triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonstrabimus singulos cylindros hemisphærio uni incriptos, ad cylindros singulos inscriptos alteri hemisphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio simul omnium ad omnes simul, (b) triplicata est rationis diametrorum BK, RZ. (b) Per 12. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemisphæria (c) definant, hemisphæriorum quoque, ac proinde & sphæ- (c) Per lem. rarum ratio triplicata erit (d) rationis diametrorum. Quod (d) Per praced. erat demonstrandum. (d) Per praced. risim. univ.

Corollarium.

Nota igitur proportionem diametrorum, etiam sphærarum proportio innotescit. Ut si minoris diameter sit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. Ut est 1. ad 1000. quartum terminum, ita sphæra minor erit ad majorem.

Conorum, Cylindrorum & Sphæaræ dimensio dabitur libro seq. ex Archimede.

Scholium.

Quemadmodum similes (e) planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora similia non nisi per 4. p. 20. l. medias duas, in proportionem datam augentur vel diminuuntur. (e) Per cor. 4. p. 20. l. 6.

Data sit sphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius sive latus sit A. Data item sit proportio quæcunque A ad B, ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & simile. Fig. 32.

Inter terminos rationis datæ A & B, inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in scholio post 13. l. 6. Sphæra cujus radius est X, sive corpus dato simile, factum super latere X, erit duplum dati.

Nam corpora similia quorum radii seu latera sunt A & X, rationem inter se habent triplicatam (f) rationis A ad X, hoc est. eandem (g) quam A habet ad B. (f) Per 8. & cor. 2. p. 9. & per 12. ac 18. l. 12. (g) Per def. 10. l. 5.

Atque hoc est celebratissimum illud problema, quod Deliacum a Deliaeo Apolline dictum est, quod is, lue sævissima Athenas populante, consultus respondisset, pestem cessaturam, si

si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8. [cap. 12.

Aiqui Valerius non ista, sed hoc solum dicit: [Plato] conductores sacræ arcis, [lege aræ,] de modo & forma ejus secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire jussit. Uti tamen pro Euclide, Eudoxum reponendum esse monet Menagius ad Diog. Laertii lib. 2. segm. 106. Caterum accuratiora si velis de hujus problematis occasione, deque methodis idem solvendi, ac præcipue de variis modis duas medias proportionales invenendi, quos excogitarunt antiqui Geometra, consule (ut alios mittam) Eratosthenem de cubi duplicatione, (inter opera ejus ad calcem Arati Oxon. 1672. edita.) Vitruvium de Architect. lib. 9. cap. 3. Plutarchum de genio Socratis, (operum Moral. edit. Francofurt. pag. 579.) Pappum Collect. Mathemat. lib. 3. prop. 5. & Eutocium (a Tacqueto laudatum supra, in schol. post 13. l. 6.) Comment. in Archimed. de sphaera & Cylindro, ad Theor. 1. lib. 2.

Porro, inter duos numeros datos invenientur duo medii proportionales hoc modo. Quadratum prioris extremi in posteriorem ducatur, & producti radix cubica extrahatur. Erit ea duorum mediorum prior. Deinde quadratum posterioris extremi per extremum priorem multiplicetur, & hujus producti radix cubica exhibebit duorum mediorum posteriorem. Exemp. gr. proponatur invenire duos medios proportionales inter 8. & 27. Multiplica ($8 \times 8 =$) 64, per 27, & orietur 1728, cujus radix cubica 12, est duorum mediorum proportionalium prior. Deinde multiplica ($27 \times 27 =$) 729, per 8, & producetur 5832, cujus radix cubica est 18, nempe duorum mediorum posterior. Nam 8, 12, 18, 27 $\div \div$. Et universaliter, si inter A & E quarantur due media proportionales M & N; erit $M = \sqrt[3]{cAqE}$, & $N = \sqrt[3]{cEqA}$.

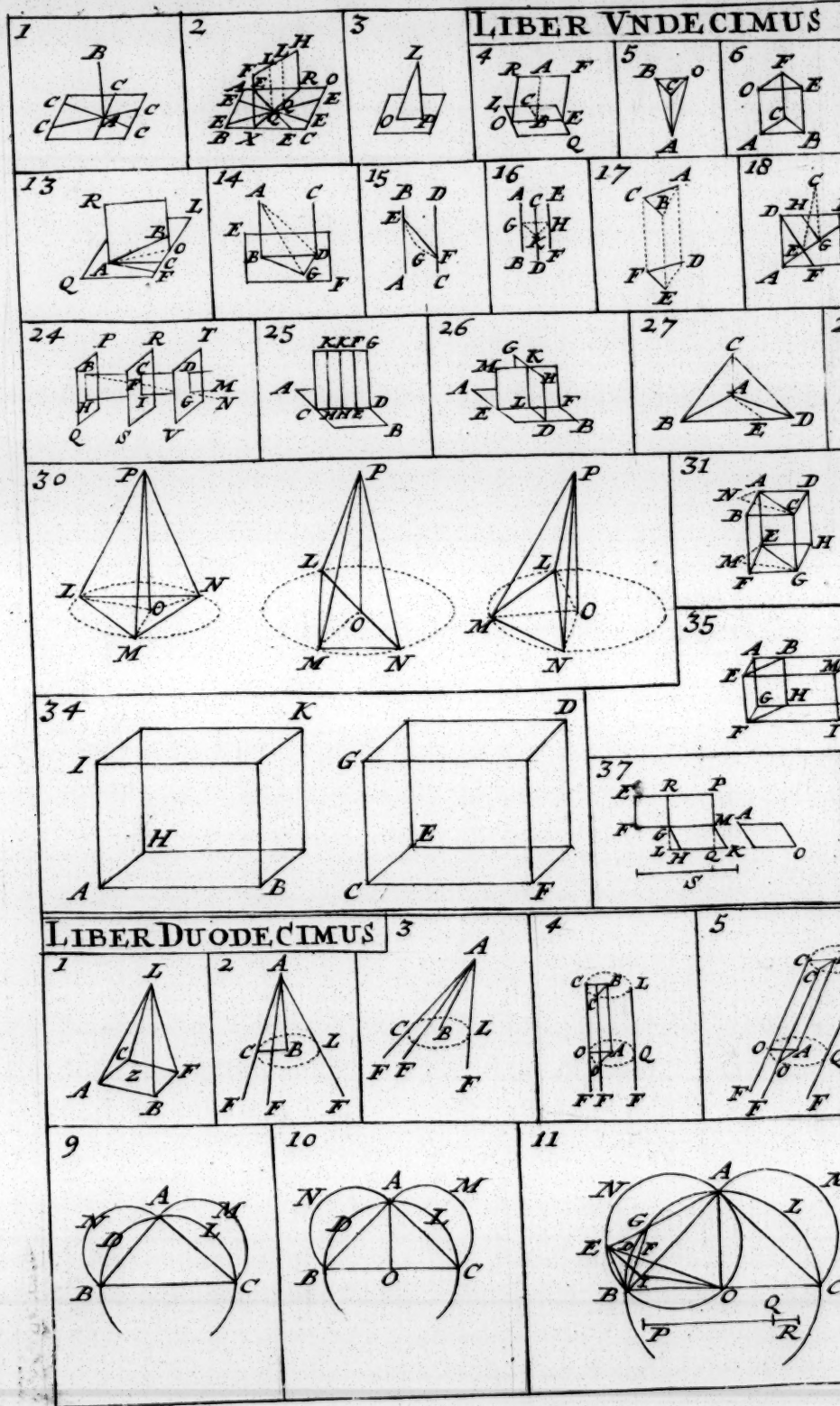
- (a) Per cor. 2. p. 22. l. 6. Cum enim rectangulum sub A & E sit (a) medium proportionale inter illarum quadrata; erunt Aq, AE, Eq $\div \div$. Ducantur hac tria plana in eandem altitudinem A; & orientur
(b) Per 32. l. 11. (b) solida continue proportionalia Ac, (c) AqE, EqA. Ducantur etiam eadem plana in altitudinem communem E, & fient
(c) Vide sch. p. 36. l. 11. solida AqE, EqA, Ec $\div \div$. Quatuor ergo solida, Ac, AqE, EqA, Ec sunt continue proportionalia; ac proinde eorum radices cubicae, A, $\sqrt[3]{cAqE}$, $\sqrt[3]{cEqA}$, E continue proportionales (d) erunt. Ergo, cum ex hypoth. sint A, M, N, E $\div \div$, erit $M = \sqrt[3]{cAqE}$, & $N = \sqrt[3]{cEqA}$.
(d) Per sch. 1. p. 33. l. 11. & p. 35. l. 5.

Si vero primus terminus fuerit 1, extracta radice cubica posterioris extremi, habebitur duorum mediorum prior, cujus medii quadratum erit duorum mediorum posterior. Si enim fuerit

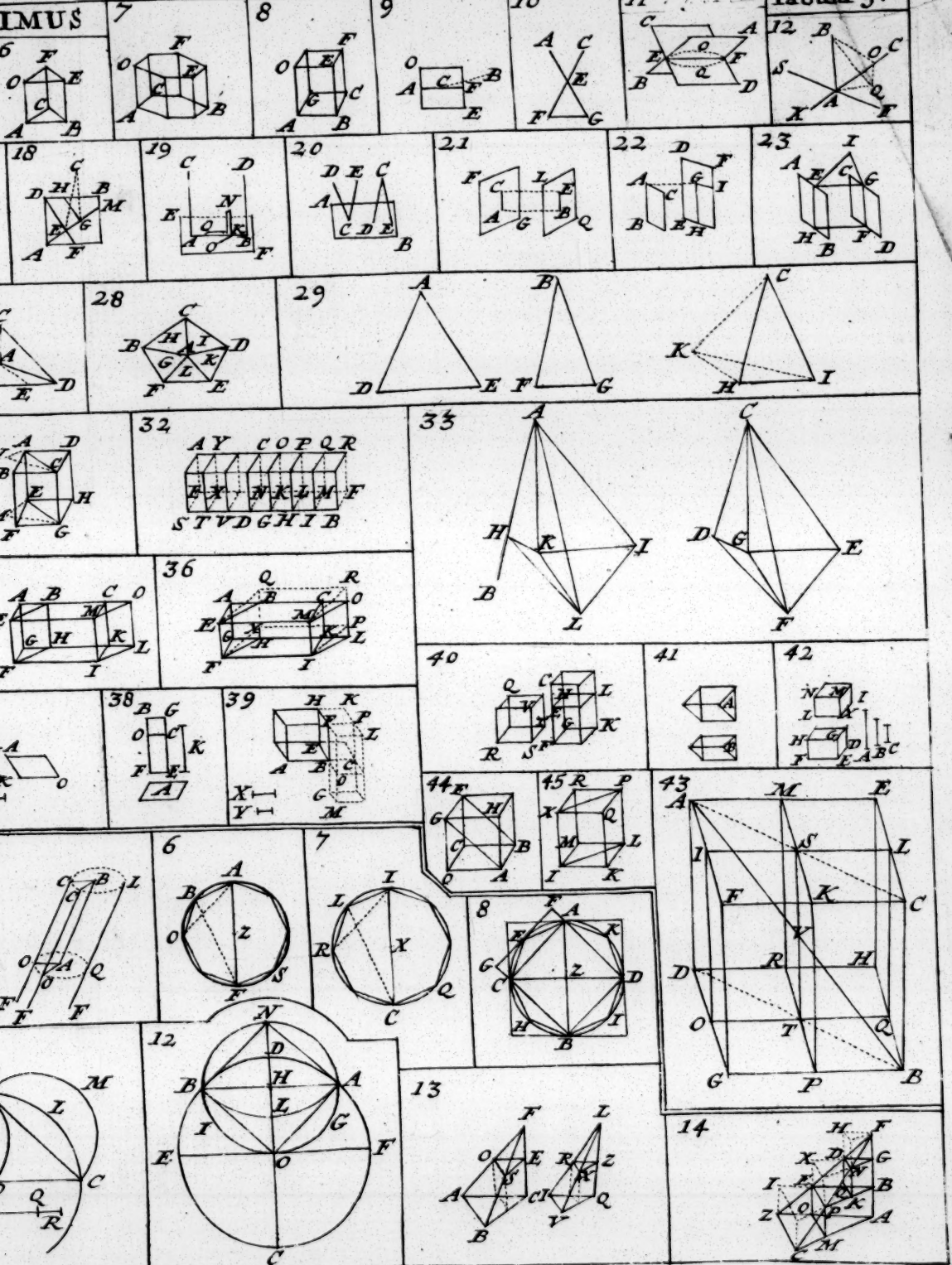
erit $A=1$, erit $Aq=1$. Unde $AqE=1 \times E=E$, & $\sqrt{cAqE}$
 (sive M) $=\sqrt{cE}$. Et eodem modo $\sqrt{cEqA}$ (sive N) $=$
 $\sqrt{cEq}=(a)\sqrt{cE} \times \sqrt{cE}$. Ex. gr. inter 1. & 125. medii sunt (a) Per cor.
 5. & 25. Est nempe $\sqrt{c125}=5$, & $5 \times 5=25$. Sunt p. 37. l. 11.
 autem 1, 5, 25, 125 $\div \div$. Ac proinde, si pro cubi dati la-
 tere ponatur unitas, habebitur latus cubi dato dupli, radicem
 cubicam numeri binarii extrahendo. Quod (cum per se ma-
 nifestum sit, tum etiam) ex eo deducitur, quod $\sqrt{c2}$ sit duo-
 rum mediorum proportionalium prior inter 1. & 2.]

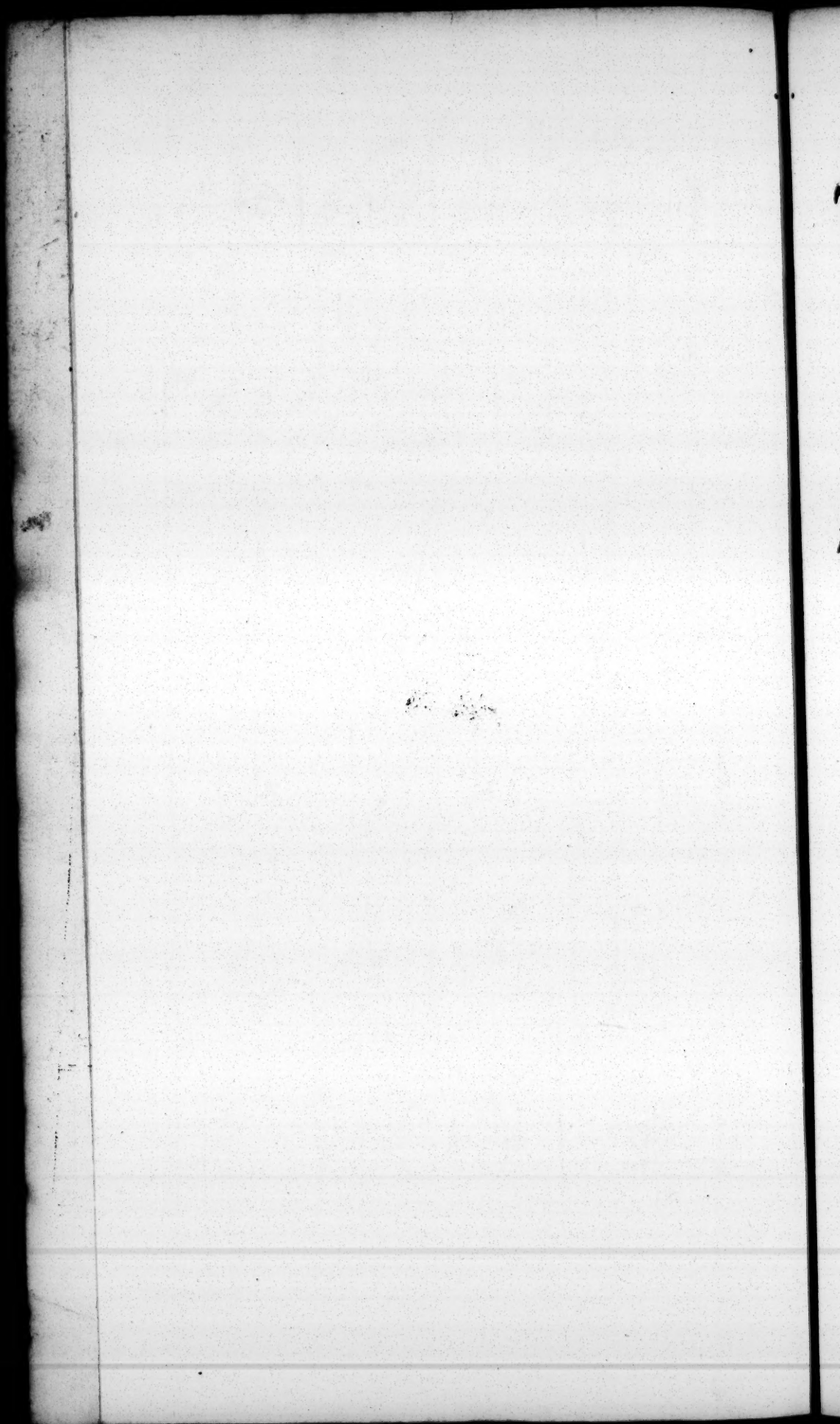
ANDREÆ





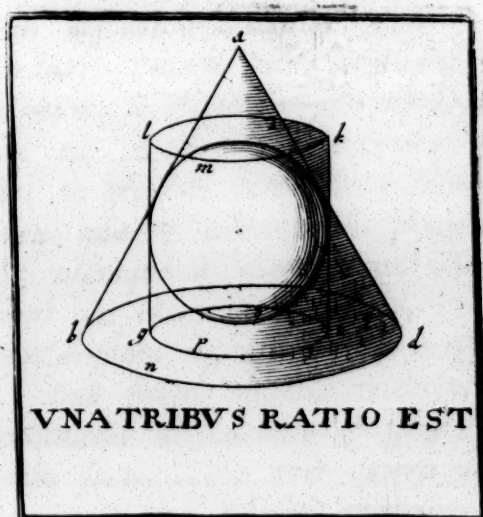
Tabula 5.





ANDREÆ
TACQUET
E SOCIETATE JESU
SELECTA EX
ARCHIMEDÆ
THEOREMATA

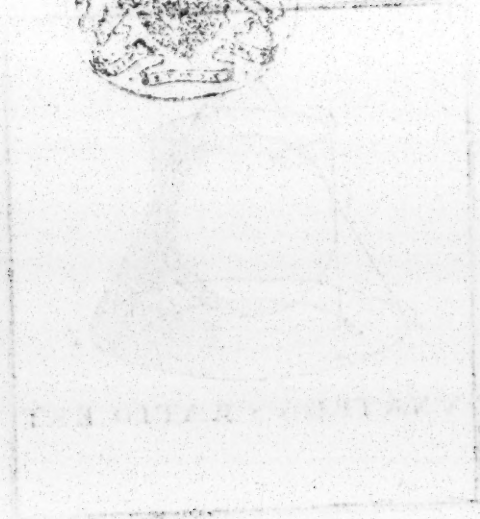
*Via faciliori ac breviori demonstrata, & novis
inventis aucta.*



CANTABRIGIÆ,

Impensis CORN. CROWNFIELD, Celeberrimæ A-
cademiæ Typographi; & JACOBI KNAPTON
Bibliopolæ Londinensis, ad insigne Coronæ in Cœme-
terio D. Pauli. MDCCXXII.

ANDRE
TACOLI
A SOCIETY OF
SECRET
ARCHIMED
THEOREMA
ON THE





LECTORI.

QUamvis in Mathematicis disciplinis complures summi & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria, communi quodam consensu, Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quam legant; admirantur plures, quam intelligant. Causa, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas; sermonis ex Græco translati obscuritas nonnulla; demonstrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex studiosæ juventutis usu futurum, si elementis jam illustratis, hæc a me selecta ex Archimede theoremata, & via multo faciliori ac breviori demonstrata subnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonstrando eam tenui, ut sperem eum qui elementa perceperit, hæc summi Geometræ præclarissima inventa negotio haud magno assecuturum. Sub finem adjectis tredecim propositionibus, Archimedis de cylindro & sphaera doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonstros sesquialteram proportionem in tribus corporibus, sphaera, cylindro, & æquilatèro cono, utroque sphaera circumscripto, continuari. Varia insuper sparsim, inter quæ propositio 12. & corollaria prop. 14. præcipua sunt, & scholia omnia adjeci. Fruere istis, quisquis Geometriæ candidatus es; & quantum ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumque in verita-

tum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehi-
que sursum persenseris, mentem ab infimis hisce rebus
feliciter jam avulsam attolle etiam altius; atque di-
rige ad Veritatem primam, eternam, immensam,
quæ Deus est, cujus ineffabili visione nos futuros a-
liquando æternum beatos confido. Vale.

THEORE-

THEOREMATA SELECTA EX ARCHIMEDE.

DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

Esto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, *Fig. 26.*
quam ad rectos angulos secet recta EG non per *tab. ex Ar-*
centrum, videlicet in D. Ex centro autem educan- *chimedæ.*
tur radii AE, AG. His positis,

1. Sector sphaeræ est, qui sectore circulari AECG, seu AEBG, circa diametrum BC in orbem actò, producitur.

2. Segmentum seu portio sphaeræ est, quæ a circulari segmento ECG, seu EBG, circa eandem diametrum BC in orbem actò, describitur.

3. Portionis sphaericæ (EBG) vertex est diametri immobilis extremitas B: Basis est circulus a recta EG descriptus: Axis est diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4. Cum sphaericæ portionis, aut corporis ei inscripti, aut conici superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & cum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus; nisi adjungatur (*tota*;) tunc enim accipiuntur & bases.

Rursum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

1. **P**olygoni circulo inscripti ambitus, minor est circuli *Fig. 1. & 19.*
peripheriâ.

2. Polygoni circulo circumscripti ambitus, circuli per- *Fig. 1.*
pheriâ major est.

3. Quod si polygonum circulo inscriptum, circa dia- *Fig. 19.*
metrum (AE) una cum circulo circumagatur; erit corporis
a polygono geniti superficies, minor sphaeræ superficie. Et,
si polygonum circulo circumscriptum, circa diametrum

una cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies, major superficie sphaeræ.

Fig. 17.

4. Similiter, ambitus polygones inscripti segmento circulari (DAF,) minor est peripheriâ segmenti (DAF.) Et si polygonum segmento inscriptum una cum segmento, circa segmenti axem (AO) circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies, minor superficie portionis sphaericæ (DAF.)

Fig. 6. & 8.

5. Superficies prismatis cylindro inscripti, minor est cylindri superficie; circumscripti vero major.

Fig. 7. & 10.

6. Et superficies pyramidis cono inscriptæ, minor est coni superficie; circumscriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

Data sint figura quæcunque seu plana seu solida, A, B: Sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B semper minus ac minus excedendo, in ipsas (a) definant, & tamen semper inter se æquales sint:

(a) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras A & B æquales esse.

E. F.

Si non, alterutra major erit. Sit ergo

A. B. X.

A major quam B excessu X. Per hypothese[m] dantur magnitudines E, F inter se æquales, quæ excedant figuras A, B excessu minori quam X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quam A. Sed F per hypothese[m] est æqualis E. Ergo etiam E minor est quam A; quod est absurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse majorem quam A. Ergo cum neutra sit major altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Data sint figura A & B; sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ a figuris datis semper minus ac minus deficiendo, in ipsas (b) definant, & semper inter se æquales sint:

(b) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

Si non,

A. B. Z. Si non, alterutra minor erit. Esto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypothesim dari possunt magnitudines O, P inter se æquales, quæ deficiant a figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major est quam A. Sed P per hypothesim est æqualis O. Ergo etiam O major est quam A, quod repugnat hypothesi, qua statuitur O minor quam A. Eodem modo ostendam B non esse minorem quam A. Quare cum neutra sit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

[Hæc vero propositiones duæ, ex porismate universali (post pr. 2. lib. 12.) absque ulteriori demonstratione, immediate deduci possent.]

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumscriptorum & inscriptorum, desinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinunt.

Si nimirum arcubus sine fine bisectis, plura semper ac plura latera circulo circumscribantur & inscribantur. Fig. 1. tab. ex Archim.

1. Pars. Intelligentur circulo inscripta & circumscripta polygona ordinata [*similia*]; five ut traditur p. 12. l. 4. five ut in hac figura, perinde erit. Manifestum est (a) FI esse ad CE, (hoc est, (b) totum ambitum circumscriptum esse ad totum ambitum inscriptum,) ut IA est ad CA. Atqui IC excessus rectæ IA supra CA, fit tandem quacunque data minor, si plura semper ac plura in infinitum latera circumscribi & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum, tandem fiet quodvis dato minor. Ergo multo (c) magis excessus (c) ambitus circumscripti supra peripheriam fiet quocunque dato minor. Similiter, quia jam ostendi defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multo (d) magis defectus inscripti ambitus a peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inscripti quam conscripti, in peripheriam (e) desinunt. Quod erat primum. Hæc ulterius demonstrare operæ pretium non est, cum satis sint manifesta.

2. Pars. Quia jam ostensum est excessum lateris FI supra latus EC fieri tandem quovis dato minorem; (est enim FI ad EC, ut IA ad CA;) etiam excessus quadrati FI supra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita (a) polygonum circumscriptum ad polygonum inscriptum. Ergo etiam excessus polygoni circumscripti supra inscriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis excessus polygoni circumscripti supra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inscripti defectus a circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygonum circulo tam inscripta quam circumscripta, in circulum (b) definunt. Quod erat alterum.
- (a) Per 20. l. 6. & schol. ei annexum.
- (b) Per def. 6. l. 12.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1.
(c) Vide def.
3. l. 4.

Polygonum (c) ordinatum circulo conscriptum (FI-NTR) aequatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo vero circuli radius.

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum aequatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

- (d) Per 18. l. 3. 1. Pars. Radius AB ad contactum ductus, (d) est perpendicularis ad tangentem IF. Quare si, ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum resolvatur in triangula; erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipsa liquet esse æqualia. Ergo triangulum basim habens parem summæ laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem vero AB, æquabitur illis (e) omnibus, hoc est, toti polygono circumscripto.
- (e) Patet ex 1. l. 6.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.

- [Nam propter æqualia inscripti latera, perpendiculares omnes a centro A æquales (f) erunt, & proinde omnia triangula in qua resolvitur inscriptum polygonum, (g) æqualia sunt. Unde eodem prorsus modo procedet demonstratio ac in parte priori.
- (f) Per 14. l. 3.
- (g) Per 38. l. 1.

Cor. 1. Hinc area polygoni ordinati circulo inscripti vel circumscripti invenitur, (h) multiplicando perpendiculum a centro ad latus quodvis ductum, in dimidiam polygoni circumferentiam

(h) Per hanc & schol. p. 41. l. 1.

Cor. 2.

Cor. 2. Et cum polygona circulo inscripta ac circumscripta, in circulum, & polygonorum ambitus in circuli ambitum tandem (a) desinant; etiam area circuli invenietur, multiplicando radium in dimidiam ejusdem peripheriam. (a) Per prac.

Cor. 3. Circulus ergo aqualis erit triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter. Exurgit (b) (b) Per sch. enim area trianguli ex dimidia basi in altitudinem ducta. Et p. 41. l. 1. eodem modo constabit, sectorem circuli aequalem esse triangulo, cujus altitudo est circuli radius, & cujus basis est recta quæ arcui sectoris aqualis sit. Hoc autem corol. ex iisæm principiis latius demonstratur in prop. seq.

Cor. 4. Figurarum isoperimetrarum capacissima est circulus. Fig. 2. Esto perimenter polygoni cujuscunque [e. gr. quadrati] EGH I aqualis circumferentia circuli cujus radius sit AF, & cujus centrum F coincidat cum centro circuli qui quadrato EGH I inscribi, vel circumscribi possit. Dico quod circuli area major est quam area polygoni. Area enim circuli aqualis (c) est trian- (c) Per cor. gulo cujus basis est circumferentia, altitudo vero semidiameter 3.

FA: & Area polygoni aqualis (d) triangulo cujus basis est peri- (d) Per hanc meter polygoni, circumferentia circuli ex hypothesi aqualis, & prop. altitudo perpendicularis FO a centro circuli in latus polygoni demissa: quæ quidem cum radio circuli semper sit minor, liquet aream polygoni area circuli esse minorem. Q. E. D.

Et similiter inter figuras solidas aequalibus superficiebus contentas, Sphæra omnium capacissima demonstrabitur.]

PROPOSITIO V.

Circulus est aqualis triangulo, cujus basis est periph- Fig. 3.
eria circuli, altitudo autem semidiameter.

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem vero radium circuli, semper sunt (e) æqualia. Atqui polygonæ circulo in (e) Per prac. infinitum circumscriptæ, in circulum (f) desinunt: similiter- (f) Per 3. que triangula (ut mox ostendam) quæ pro basi habent am- hujus. bitum polygoni circumscripti, pro altitudine vero radium AB, tandem desinunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. Ergo (g) circulus, & (g) Per 1. triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine ra- hujus. dium AB, æqualia sunt.

Quod autem triangula sub ambitu polygoni & radio, desinunt in triangulum sub peripheria & radio, sic ostendo. Triangula sub ambitu circumscripti polygoni & radio AB sunt

- (a) Per 1. sunt ad triangulum sub peripheria & radio AB, ut (a) basis
l. 6. ad basim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam; cum
altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in
(b) Per 3. peripheriam (b) definit. Ergo & triacula defendant in trian-
hujus. gulum.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l. 1. [vel potius, ex hac & cor. p. 42.
l. 1.] patet rectangulum sub radio & dimidia cir-
cumferentia; [sive sub diametro & circumferentia quadrante;
seu denique, sub quarta parte diametri & circumferentia] esse
æquale circulo: sub radio & tota circumferentia, [sive sub
diametro & dimidia circumferentia] esse [circuli] duplum:
sub tota diametro & tota circumferentia esse quadruplum
circuli.

Fig. 9. l. 4. 2. Circulus est ad quadratum sibi inscriptum, ut circum-
ferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum vero
circumscriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum,
[sive ut circumferentia dimidia ad diametri duplum; & ad
radii quadratum, ut circumferentia ad diametrum.]

Nam rectangulum sub [dimidia circumferentia] CDE &
radio CA seu CF, (hoc (c) est, ipse circulus,) est ad rectan-
gulum GFCE, nimirum sub FG & CF, (hoc (d) est, ad
(c) Per cor. quadratum inscriptum BCDE,) ut (e) CDE dimidia cir-
1. cumferentia est ad FG seu CE diametrum; quod erat pri-
(d) Per sch. mum. Ac proinde circulus est ad duplum rectanguli GFCE,
post pr. 6. & 7. l. 4. (hoc est, ad FH quadratum circumscriptum,) ut [circum-
(e) Per 1. ferentia dimidia] CDE ad duplam diametrum CE; [quod
l. 6. erat secundum, Adeoque circulus est ad quartam partem
quadrati circumscripti, hoc est, ad radii quadratum, ut di-
midia circumferentia ad semidiametrum, sive ut circumferen-
ad diametrum; quod erat tertium.]

3. Ex corollario primo, quadrantis ope, mechanice habebitur
rectangulum vel quadratum æquale circulo ejusdem cum qua-
drante radii; atque inde, circuli cujusvis quadratura mecha-
(f) Per cor. nice obtinebitur. Rectangulum enim (f) sub quadrantis arcu
1. & duplo radio; adeoque & quadratum (g) media propor-
(g) Per 13. tionalis inter arcum & duplum radium, circulo ejusdem cum
& 17. l. 6. quadrante radii exæquabitur. Atque inde, dato cuivis alteri
circulo æquale rectangulum vel quadratum invenietur per cor.
7. p. 2. l. 12.

Mechanice vero habebitur linea recta, dati quadrantis arcui
æqualis, filum vel chartam ad arcum illum applicando; vel
etiam arcum super plano, secundum regula vel linea recta dire-
ctionemvolvendo.]

PRO-

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minus quam ter & unam septimam (seu $\frac{10}{7}$), plus vero quam ter & $\frac{1}{7}$.

Ad hujus theorematis demonstrationem, assumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumscriptum, inscriptum alterum, utrumque 96. laterum. Deinde ostendit 96. latera circulo circumscripta continere diametrum minusquam ter & $\frac{1}{7}$. ac proinde circumferentiam quæ ipsis minor est, etiam continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96. circumferentiæ inscripta, (ac proinde & circumferentiam, quæ ipsis major est,) amplius continere diametrum quam ter & $\frac{1}{7}$. Porro longior est hujus rei demonstratio quam ut hoc loco adferri debeat.

[At tanti momenti theorema, cui demonstrando Archimedes ipse librum integrum impendit, ut indemonstratum prorsus tyronibus obrudatur, a meipso impetrare nequeo. En igitur ejusce demonstrationem Archimedeam, quam Magni Barrovii vestigiis præcipue insistendo, hic descripsi.]

Pars prima. Circuli cujuscunque perimeter, diametri AB tri- Fig. 4.
plum excedit, quantitate minori quam $\frac{1}{7}$ parte ejusdem diametri.

Esto C centrum circuli, & AD (radio AC aqualis,) (a) latus (a) Per cor. hexagoni circulo inscriptibilis, & juncta CD, erit (b) angulus 1. pr. 15. l. ACD sexta pars rectorum quatuor. Angulus ACD bisecetur 4. recta CE, qua etiam (c) bisecabit AD in S, eique perpendicularis (b) Per 26. l. 3. & cor. erit. Producat CE donec occurrat recta EA tangenti circulo in A; & continua angulorum ad C bisectione, ducantur ad 1. p. 33. l. tangentem recta CF, CG, CH, CK, ut sit ang. ACD = 2 ang. ACE 6. = 4 ang. ACF = 8 ang. ACG = 16 ang. ACH = 32 ang. ACK. (c) Per n. 3. schol. p. Erit itaque angulus ACH, (sive 2 ang. ACK) $\frac{1}{96}$ (pars nona. 26. l. 1. gesima sexta) rectorum quatuor. Et si in tangente producta capiatur AL = AK, & jungatur CL, erit (d) angulus ACL (d) Per 4. l. 1, angulo ACK aqualis; & proinde, angulus LCK anguli ACK duplus erit, sive aqualis angulo ACH, seu $\frac{1}{96}$ rectorum quatuor; & LK erit latus figura ordinata 96 laterum circulo circumscriptibilis,

cumscripibilis, cujus proinde ambitus erit 96LK, circuli circumferentia (a) major. Si itaque ostendatur 96LK minorem esse quam $3\frac{1}{7}$ diametri AB; Ergo etiam circuli perimeter minor erit quam $3\frac{1}{7}$ ejusdem diametri.

(b) Per 8. Ob triangula similia (b) CEA, CAS, erit CE:EA::CA:AS. Sed CA = (c) 2 AS; ergo CE = 2 EA. Et ob angulum AGE bisectum recta CF, (d) erit EC:CA::EF:FA; &

(c) Prius. compon. EC + CA:CA::EA:FA; & permut. EC + CA:EA::CA:FA. Et eodem modo ostendetur esse FC + CA:FA::CA:GA; & GC + CA:GA::CA:HA; & denique HC + CA:HA::CA:KA.

(e) Prius. Ponatur EC = 306: erit ECq = 93636, & EA (e) erit = 153, unde EAq = 23409, & CAq (= ECq (f) - EAq = 93636 - 23409) = 70227. Sed $\sqrt{70225} = 265$. Ergo CA major est quam 265, & EC + CA major quam (306 + 265 =) 571. Et cum sit EC + CA:EA::CA:FA, sit-

(g) Per 8. que ratio EC + CA ad EA (g) major ratione 571 ad 153, erit (h) etiam ratio CA ad FA major ratione 571 ad 153,

(h) Per sch. hoc est, (utrumque numerum multiplicando per 8,) ratione 4568 ad 1224. Si itaque ponatur FA = 1224, erit (i) CA

(i) Per 10. major quam 4568.

(j) Per 7. Ponatur igitur FA = 1224, eritque FAq = 1498176: Et cum CA major sit quam 4568, erit CAq majus quam

(k) Per 47. 20866624, adeoque CFq (= (k) FAq + ACq) majus erit quam 1498176 + 20866624, hoc est, quam 22364800. Sed $\sqrt{22363441} = 4729$. Ergo FC major est quam 4729, & FC + CA major quam 4729 + 4568, hoc est, quam 9297. Et cum sit FC + CA:FA::CA:GA, sitque ratio FC + CA ad FA, major ratione 9297 ad 1224, erit etiam ratio CA ad GA major ratione 9297 ad 1224. Si itaque ponatur GA = 1224, erit CA major quam 9297.

Ponatur igitur GA = 1224, eritque GAq = 1498176: Et cum CA major sit quam 9297, erit CAq majus quam 86434209, adeoque CGq (= GAq + ACq) majus erit quam 1498176 + 86434209, hoc est, majus quam 87932385. Sed $\sqrt{87928129} = 9377$. Ergo CG major est quam 9377, & GC + CA major est quam 9377 + 9297, sive major quam 18674. Et cum sit GC + CA:GA::CA:HA, sitque ratio GC + CA ad GA major ratione 18674 ad 1224, sive (utrumque dimidiando) ratione 9337 ad 612; erit etiam ratio CA ad HA major ratione 9337 ad 612. Si itaque ponatur HA = 612, erit CA major quam 9337.

Ponatur igitur HA = 612, eritque HAq = 374544. Et cum CA major sit quam 9337, erit CAq majus quam 87179569, adeo-

adeoque $CHq (=HAq + ACq)$ majus quam 374544 + 87179569, hoc est, majus quam 87554113. Sed $\sqrt{87553449} = 9357$. Ergo CH major est quam 9357, & $HC + AC$ major erit quam 9357 + 9337, hoc est, major quam 18694. Et cum sit $HC + CA : HA :: CA : KA$; sitque ratio $HC + CA$ ad HA major ratione 18694 ad 612, siue (utrumque dimidiando) ratione 9347 ad 306; erit etiam ratio CA ad KA major ratione 9347 ad 306. Si itaque ponatur $2AK$ siue $LK = 306$, erit $2AC$ siue AB major quam 9347. & ratio AB ad 9347 major erit ratione LK ad 306; & proinde, ratio $3\frac{1}{2}AB$ ad $(3\frac{1}{2} \times 9347 =) 29376\frac{1}{2}$, major erit (a) ratione 96LK ad $(96 \times 306 =) 29376$. Hac autem ultimi (a) Per 15. ma est ratio aequalitatis, cum sit $96LK = 29376$. Ergo $3\frac{1}{2}AB$ l. 5. major est quam $29376\frac{1}{2}$; & proinde adhuc major quam 29376, siue quam 96LK. Ambitus ergo polygoni ordinati 96 laterum circulo circumscripti, & multo magis perimeter circuli cui circumscribitur polygonum illud, minor est quam $3\frac{1}{2}$ diametri ejusdem circuli. Q. E. D.

Pars secunda Circuli perimeter, diametri AB triplum ex- Fig. 5.
cedit, quantitate majori quam $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ partibus ejusdem diametri.

Esto arcus AD sexta pars totius circumferentie circularis, & continua bisectione fiat arc. $AD = 2$ arc. $AE = 4$ arc. $AF = 8$ arc. $AG = 16$ arc. AH ; & erit arcus AH $\frac{1}{3}$ totius circumferentie. Ducantur recta BD, BE, BF, BG, BH ; & AD, AE, AF, AG, AH ; erit AH latus figura ordinata 96 laterum circulo inscriptibilis, cujus proinde ambitus, $96AH$, erit circuli circumferentia (b) minor. Secent recta AD, BE se invicem in K , & propter angulos EBA, EAD aqua- (b) Per axio. 1. hujus. libus arcibus insistentes, & proinde (c) aequales, & angu- (c) Per 29. lum ad E communem, triangula ABE, KAE (d) erunt l. 3. similia, & proinde $AB : AK :: BE : EA$. Et in triangulo ABD , (d) Per cor. ob angulum B (e) bisectum recta BK , erit (f) $DB : BA :: DK : KA$; & compon. $DB + BA : BA :: DA : KA$; & permut. & p. 4. l. 6. $DB + BA : DA :: BA : AK ::$ (prius) $BE : EA$. Et pari ratio- (e) Per 29. cinio ostendetur esse $EB + BA : EA :: BF : FA$; & $FB + BA : FA :: BG : GA$; & $GB + BA : GA :: BH : HA$. (f) Per 3. l. 6.

Ponatur jam $BA = 1560$, eritque $BAq = 2433600$, & $DA (= \text{radio } g) AC = 780$; unde $DAq = 608400$, & DBq (g) Per cor. $(= BAq - DAq) = 1825200$. Sed $\sqrt{1825201} = 1351$. l. 1. p. 15. l. Ergo 4.

Ergo DB minor est quam 1351, & $DB + BA$ minor quam $(1351 + 1560 =) 2911$. Quare ratio 2911 ad 780, hoc est, (utrumque numerum per 100 multiplicando,) ratio 291100 ad 78000, major est ratione $DB + BA$ ad DA , sive BE ad EA . Si itaque ponatur $EA = 78000$, erit BE minor quam 291100.

Ponatur igitur $EA = 78000$, eritque $EAq = 6084000000$. Et cum sit BE minor quam 291100, erit BEq minus quam 84739210000, & $BAq (= BEq + EAq)$ minus quam 90823210000. Sed $\sqrt{90826890625} = 301375$. Ergo BA minor est quam 301375, & $EB + BA$ minor quam $(291100 + 301375 =) 592475$. Quare ratio 592475 ad 78000, hoc est, (utrumque numerum dividendo per 325, & quotos inde ortos per 11 multiplicando,) ratio 20053 ad 2640, ratione $EB + BA$ ad EA , sive BF ad FA major erit. Si itaque ponatur $FA = 2640$, erit BF minor quam 20053.

Ponatur igitur $FA = 2640$, eritque $FAq = 6969600$. Et cum BF minor sit quam 20053, erit BFq minus quam 402122809, & $BAq (= BFq + FAq)$ minus quam 409092409. Sed $\sqrt{409131529} = 20227$. Ergo BA minor est quam 20227, & $FB + BA$ minor quam 40280. Quare ratio 40280 ad 2640, hoc est, (utrumque dividendo per 40, & quotos inde ortos multiplicando per 6,) ratio 6042 ad 396 major est ratione $FB + BA$ ad FA , sive BG ad GA . Si itaque ponatur $GA = 396$, erit BG minor quam 6042.

Ponatur igitur $GA = 396$, eritque $GAq = 156816$. Et cum BG sit minor quam 6042, erit BGq minus quam 36505764, & $BAq (= BGq + GAq)$ minus quam 36662580. Sed $\sqrt{36663025} = 6055$. Ergo BA minor est quam 6055, & $GB + BA$ minor quam 12097. Quare ratio 12097 ad 396, hoc est, (utrumque duplicando,) ratio 24194 ad 792 major est ratione $GB + BA$ ad GA , sive ratione BH ad HA . Si itaque ponatur $HA = 792$, erit BH minor quam 24194.

Ponatur igitur $HA = 792$, eritque $HAq = 627264$. Et cum BH minor sit quam 24194, erit BHq minus quam 585349636, & $BAq (= BHq + HAq)$ minus quam 585976900. Sed $\sqrt{585978849} = 24207$. Ergo BA minor est quam 24207, & ratio AH ad AB major erit ratione 792 ad 24207, sive (utrumque dividendo per 3,) major ratione 264 ad 8069; & proinde ratio 96AH ad AB major erit ratione $(96 \times 264 =) 25344$ ad 8069. Et quoniam $(25344, \text{ sive } 25344 \times 1 \text{ superat } (25343\frac{3}{7}, \text{ sive } 8069 \times 3\frac{1}{7} ; \text{ erit}$
(a) ratio.

(a) ratio 25344 ad 8069 major ratione $3\frac{1}{7}$ ad 1. ac (b) pro- (a) Per cor.
 inde ratio 96 AH ad AB major est ratione $3\frac{1}{7}$ ad 1. Ergo (c) (b) Per sch.
 factum extremorum majus erit facto mediorum, hoc est, 96 AH, p. 11. l. 5.
 siue ambitus polygoni circulo inscripti, & proinde circuli cir- (c) Per cor.
 cumferentia cui inscribitur, major erit quam $3\frac{1}{7}$ diametri 6. p. 16. l. 6.
 AB. Q. E. D.]

Quod si ad polygona plurium adhuc laterum Geometri-
 cum ratiocinium velimus extendere, limites jam statutos
 arctare poterimus magis magisque sine termino, atque ita
 propius in infinitum ad veram proportionem accedere.
 Præstitum est hoc a Ludolpho a Ceulen, Grimbergero,
 Metio, Snellio, aliisque.

[Cum autem tangens graduum 36 in 10 ducta, det penta. Vld. Fig. 1.
 goni circumscripti; & sinus graduum 36 in 10 ductus, det
 pentagoni inscripti perimetrum: Cum etiam consimiliter, tan-
 gens gradus dimidii in 720 ducta, polygoni laterum 360 cir-
 cumscripti, & sinus gradus dimidii in 720 ductus, polygoni
 laterum 360 inscripti perimetrum exhibeat; atque ita porro
 in infinitum; Obscurum esse nequit quo pacto e datis jam si-
 nuum atque tangentium tabulis, numeri sequentes inveniri po-
 terunt.]

Proportiones præcipuas hætenus inventas hic subjicio.

Prima est Archimedis, hujusmodi:

Diameter 7.

Circumf. 22. major vera.

Diameter 71.

Circumf. 223. minor vera.

[Nam $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$; & $\frac{223}{71} = 3\frac{1}{71}$.]

Rationes 22. ad 7. & 223. ad 71, si ad commune con-
 sequens reducantur, (quod fit eodem modo, quo fractiones
 revocantur ad eundem denominatorem;) rationes orientur
 1562. ad 497. & 1561. ad 497.

Posita igitur diametro partium 497.

erit circumferentia major vera 1562.

& circumferentia minor vera 1561.

Utraque igitur a vera differt quantitate minori, quam fit
 $\frac{1}{497}$ pars diametri.

Quod si rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad
 commune consequens; provenient rationes 1561 ad 4906,
 & 1562 ad 4906.

Posita

Posita igitur circumferentia partium 4906,
erit diamēter minor vera 1561.
diameter major vera 1562.

Utraque igitur a verā diametro differt quantitate minori,
quam sit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita a Metio est Archimedea multo accuratior. Juxta hanc est

Diameter 113.

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris constantes, nulla verā propinquior: ex hac enim, posita diametro 10,000000, provenit circumferentia 31,415929, quæ a vera solum penes notam primam 9 differt excessu paulo majore, quam sint duæ particulæ decimillionesimæ diametri.

Sed utraque multo exactior est gemina illa Ludolphi a Ceulen: prioris termini constant notis 21, posterioris vero notis 36.

Diameter

100,000000,000000,000000.

Circumf. major vera

314,159265,358979,323847.

Circumf. minor vera

314,159265,358979,323846.

Differentia utriusque circumferentiæ est particula una diametri, denominata a numero, qui constat unitate & 20 cifris; ac proinde tam hæc quam illa a vera circumferentia differt minori quantitate quam sit diametri particula dicta, videlicet centies millionesies millionesies millionesima.

Diameter

100000,600000,000000,000000,000000,000000.

Circumf. major vera

314159,265358,979323,846264,338327,950289.

Circumf. minor vera.

314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Differentia utriusque circumferentiæ, inter quam vera existit, est diametri particula una denominata a numero, qui constat unitate & 35. cifris, quæ particula ad diametrum, minorem habet proportionem, quam arenula una ad orbem terræ. Non enim constat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Frustra igitur sit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

[Positum]

[Posita vero Circumferentia partium

1,000000,000000,000000,000000,000000,000000,000000,

Diameter erit quamproxime, partium

0,318309,886183,790671,537767,926745,028724.

Corol. 1. Cum in numeris minus accuratis, sit circuli circumferentia ad diametrum ut 22 ad 7; erit circulus in ejusmodi numeris ad quadratum inscriptum, ut 11 ad 7; ad quadratum circumscriptum ut 11 ad 14; & ad radii quadr. ut 22 ad 7. Sequuntur hæc ex cor. 2. prop. præced.

Cor. 2. Cum vero, in numeris accuratioribus, circuli circumferentia sit ad diametrum, ut 355 ad 113; erit in iisdem numeris, circulus ad quadratum inscriptum ut 355 ad 226; ad quadratum circumscriptum ut 355 ad 452; & ad radii quadratum ut 355 ad 113.

Cor. 3. Si autem pro circumferentia ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inscriptum ut 100000 ad 63662; ad quadratum circumscriptum ut 100000 ad 127324; & ad radii quadratum ut 100000 ad 31831 circiter.

Cor. 4. Si denique pro diametro ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inscriptum ut 157080 ad 100000; ad quadratum circumscriptum ut 78540 ad 100000; & ad radii quadratum ut 314159 ad 100000 fere.

Scholium.

Proportionis jam traditæ fructus eximii, sunt hi quæ sequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentia.

Majorum terminum unius è proportionibus jam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quærat per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæsitæ diameter.

Ut si detur circumferentia maximi circuli terræ, milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quærat per terræ diameter; sic stabunt termini:

$$355 : 113 :: 8640 : :$$

multiplica jam secundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica $2750\frac{1}{2}$ pro diametro orbis terræ.

[Errare videtur noster, circumferentia terrestri milliaria Belgica 8640 tribuendo. Ex dimensione Snellii, ambitus terra

T

milliaria

milliaria Belgica 6840 continet, uti apud Varenium videre est; pro quibus Tacquetus 8640 milliaria posuit, numerum centenarium & millenarium ex incuria transponendo. Ex vero igitur numero Snelliano, tyronibus exercitationis ergo, computum de novo instituendi prabetur occasio.]

Inventio circumferentia ex Diametro.

Terminus minor unius e proportionibus supra traditis statuatur primo loco, major secundo, diameter nota tertio: His tribus numeris quæraturs quartus proportionalis. Is dabit quæsitam circumferentiam.

Ut si detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{1}{7}\frac{4}{1}$. & quæraturs ambitus; termini ita stabunt.

$$113 : 355 :: 2750\frac{1}{7}\frac{4}{1} : .$$

Tunc secundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. pro ambitu orbis terræ.

Quam modice hæc circumferentia veram excedat, dictum est supra, excessu videlicet paulo majore, quam sint diametri terrestres duæ particulæ decimillionesimæ, hoc est, 9. circiter aut 10. pedibus Rhyndicis, quorum 18000. constituunt milliare horarium. Quod si utamur proportionem Ludolphina etiam priori, cujus termini constant 21. notis; invenieturs circumferentia insensibiliter a vera differens, non solum diametro data milliariorum Belgicorum 2750. qualis est terræ; verum etiam, licet diameter ponatur centum millionum eorundem milliariorum, qualis fortasse est diameter firmamenti. Hac enim posita, proveniet circumferentia minori quantitate a vera differens, quam una centimillionesima particula pedis Rhyndici. Quod si, ad investigandam circumferentiam orbis terræ, utamur proportionem Archimedis, intervallum circumferentiarum vera majoris ac minoris, excedet 5 milliaria Belgica. Non est igitur adhibenda Archimedea proportio, nisi in quantitate parva: imo semper expediet Metiana uti, quæ & modicis constat terminis, & plusquam millies exactior est.

Circuli dimensio.

Semidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus. Ut

Ut si semidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375. multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5,940000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ a vera habetur, si differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ a dimidia vera, ducatur in semidiametrum datam; aut si differentia semidiametri inventæ a vera, ducatur in datam semicircumferentiam.

[Dimensio sectoris circularis AEBG (vel AECG,) Fig. 16.
ex datis radio circuli AE, & arcu sectoris
EBG (vel ECG.)

Flat, ut 113 ad 355, ita (a) semidiameter data ad semi- (a) Per 15.
circumferentiam circuli: deinde, ut gradus 360 ad gra- l. 5.
dus arcus dati, ita (b) semicircumferentia jam inventa, ad (b) Per eand.
arcus sectoris dimidium EB, (vel EC;) quo in radium datum
ducto, (c) exorietur area sectoris quaesiti. (c) Per cor.

Et, si area trianguli rectilinei AEG, sectori majori AEBG 3. p. 4. hu-
addatur, (vel a minore AECG subducatur;) habebitur cir- jus, & schol.
culi segmentum majus EDGB, (vel minus EDGC.) Area p. 41. l. 1.
vero istius trianguli [d] est rectang. ADXDE. Est autem (d) Per sch.
ED (e) sinus, & AD cosinus arcus EB (vel EC.) Ex datis p. 41. l. 1.
itaque segmenti arcu EBG (vel ECG) & basi EG; vel ex datis (e) Per def.
radio EA & basi EG; vel denique ex radio EA & arcu 10. l. 3. &
EBG (vel ECG;) inveniuntur ED & DA, atque adeo area tri- cor. 1. p. 3.
anguli EAG. Verum hac potius e trigonometria petenda sunt.] l. 3.

Dimensio Cylindrorum & Conorum.

EAM hic appono, quod a circuli dimensione pendeat. Cylindrus igitur & prisma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per basim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in basim ducta; sunt enim partes tertiæ cylindrorum ac prismatum, eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium, per 10. & 7. l. 12.

Sit basis Cylindri aut conî 50. ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100. in 50, proveniunt 5000. pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50, proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate conî.

Fig. 14. [Dimensio Coni truncati NQRO, ex datis basibus parallelis ZZ, SS, & altitudine VD.

AD hoc problema solvendum, lemma sequens pramittatur:
 Ut est differentia radiorum qui sunt in basibus, (NV — QD,) ad radium minorem (QD;) ita est altitudo coni truncati (VD,) ad altitudinem partis deficientis (DP.)
 Ducta enim in triangulo NVP, recta DI ad PN parallela,
 (a) Per 2. erit (a) VI:IN::VD:DP. Sed propter parallelogrammum
 l. 6. NIDQ, (b) est IN = QD, & proinde VI = NV — QD.
 (b) Per 34. Ergo liquet propositum.
 l. 1.

Datis itaque tribus prioribus, invenietur quarta DP, altitudo nempe partis deficientis QPR, cujus altitudinis pars tertia in basem SS ducta, dabit partem illam deficientem QPR. Deinde pars tertia rectarum PD + DV, sive altitudinis coni completi, ducta in basem ZZ, dabit conum completum NPO; a quo si subducatur pars deficiens QPR, relinquetur conus truncatus NQRO.

Porro notandum est, hanc demonstrationem non minus in coni truncati scaleni, quam in recti dimensione valituram, uti ex iis quæ de pyramidis truncata dimensione in libro elementorum duodecimo scripsimus, satis patet.]

PROPOSITIO VII.

Fig. 6. & 7. Circulorum peripheriæ eam inter se proportionem
 l. 12. habent, quam diametri, [sive radii.]

Nam polygonorum similium circulo sine fine inscripti-
 (c) Per cor. bilium ambitus sunt inter se semper ut (c) diametri AF &
 1. p. 1. l. 12. IC. Sed hi (d) ambitus in peripherias desinunt. Ergo
 (d) Per 3. etiam peripheriæ sunt inter se ut diametri. Quod erat
 hujus. demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 6.
 Archim.

Superficies prismatis cylindro tam circumscripti quam inscripti, aquatur rectangulo, cujus altitudo est latus cylindri, basis vero aqualis perimetro basis prismatice.

1. Pars

1. Pars. Prismatis conscripti superficies tangit cylindrum secundum lineas EA, NF, &c. quæ sunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus sit rectus) ad planum baseos recta (a) sunt, ac proinde etiam (b) recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt vero & æqualia inter se. Igitur unum cylindri latus communis est omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo. Conscripti igitur prismatis superficies æquatur (c) rectangulo sub ambitu basis prismaticæ, & prismatis seu cylindri latere contento.

(a) Per def. 3. l. 12. &
p. 8. l. 11.
(b) Per def. 3. l. 11.
(c) Patet ex 1. l. 6.

Eadem est ratio secundæ partis. Nam latus cylindri [BD, vel IK, vel QP, &c.] communis rursus est altitudo rectangulorum BDIK, KIQP, &c. quæ constituunt superficiem prismatis inscripti.

PROPOSITIO IX.

Piramidis ordinatæ cono recto circumscriptæ superficies, æqualis est triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia (FHL D,) altitudo autem latus conî (BG.) Fig. 7.

Et pyramidis ordinatæ cono recto inscriptæ superficies æquatur triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (BO) a vertice in latus baseos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ BG, BK, BM. Erunt hæ recti conî latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA (d) rectus est basis plano FKD, etiam planum (d) Per hyp. (e) GBA plano FKD rectum erit. Atqui HG perpendicularis (e) Per 18. (f) est ad AG communem sectionem planorum FKD & GBA. Ergo HG etiam (g) recta est plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque est ad (h) ipsam BG. Ergo GB latus conî erit altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus conî erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentia FHL D, & latere conî comprehensum (i) æquatur superfici ei pyramidis circumscriptæ abscis- que basi. Quod erat primum.

(d) Per hyp. 1. l. 11.
(e) Per 18. l. 3.
(f) Per 18. l. 3.
(g) Collig. ex def. 4. l. 11.
(h) Per def. 3. l. 11.
(i) Patet ex 1. l. 6.

2. Partis similis fere demonstratio est.

[Ponantur latera baseos inscriptæ pyramidis ordinatæ, lateribus circumscriptæ parallela; & secet latus CI planum GBA in O, & jungatur OB, eritque CI ad planum AOB (k) recta, (k) Per 8. & proinde rectis AO, BO, a centro baseos & a vertice conî ductis (l) perpendicularis. Sed omnes ejusmodi rectæ

- AO a centro ad quodvis baseos polygonæ ordinatæ latus perpendicularares, (a) sunt æquales, & proinde in omnibus triangulis BAO, propter axem BA communem & ad planum baseos rectum, & omnia latera AO sibi invicem æqualia, (b) erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur triangula quæ pyramidis inscripta superficiem constituunt, æqualem habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, a cujuscvis trianguli vertice B ad basem demissa; & simul sumpta (c) aquabuntur (hoc est, superficies pyramidis cono recto inscripta æquabitur) triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis inscripta circumferentia, & cujus altitudo est perpendicularis BO. Quod erat alterum.*
- Aliter. Cum triangula quæ pyramidis inscripta superficiem componunt, pro basibus habeant æqualia polygoni ordinati, quod basi cono inscribitur, latera, & pro cruribus æqualia cono recti latera; triangula ista erunt sibi mutuo æquilatera, (d) æquilatera, & (cum sibi mutuo imposita (e) congruant,) altitudinis æqualis. Unde ut prius, triangulum quod continetur sub altitudine communi, & sub basi quæ omnibus triangulorum basibus, sive quæ perimetro polygoni inscripti æquetur, triangulis istis, sive pyramidis inscripta superfici (f) æquale erit.]*
- (a) Per. 14. l. 3.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Patet ex 1. l. 6.
(d) Per 8. l. 1.
(e) Per ax. 8. l. 1.
(f) Patet ex 1. l. 6.

PROPOSITIO X.

- Superficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti definit (g) in cylindri superficiem: & pyramidis ordinatæ cono recto circumscriptæ superficies in cono superficiem definit.*
- (g) Vide def. 6. l. 12.

Fig. 6.

1. Pars. Prismatum ordinatorum cylindro sine fine conscriptorum & inscriptorum superficies, habebunt tandem inter se differentiam data minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis superficies circumscripti prismatis a superficie cylindri, inter inscriptam & circumscriptam media, differet differentia minori quacunque data, hoc est, (h) delinet in cylindricam superficiem, minus semper ac minus excedendo.
- (h) Per def. 6. l. 12.

7. Fig.

2. Pars. Eodem modo ostenditur ex 9. & 3. hujus. In figuris tantum exhibentur cylindri & cono semisses, ne multitudo linearum confusionem pareret. Caterum cogitandi sunt cylindrus & conus integri, quos prismata & pyramides circumscriptæ ambiunt. Sic enim clarius apparet planas superficies circumscriptas esse majores ex 1. axioma.

[Scholium]

Scholium 1. Cum propositiones 4. sequentes, & quadam e corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonstrantur, & eo ordine disponantur, ut necessario per ambas procedendum sit; opus tyronibus haud ingratum me facturum spero, si propositiones illas, una cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expedita, ex hac prop. 10. deduxerim.

Corollaria ex prima parte prop. 10.

1. **H**inc sequitur, cylindri recti superficiem CD, aequari rectangulo sub CB latere cylindri, & BN baseos peripheria. Fig. 8.
Superficies enim prismatum cylindro sine fine circumscriptorum, aequales semper (a) sunt rectangulis sub latere cylindri & basium prismaticarum perimetris. Sed ejusmodi superficies prismatica in (b) superficiem cylindricam, & perimetri basium prismaticarum in (c) peripheriam baseos cylindri tandem desinunt. Ergo (d) superficies cylindri aequatur rectangulo sub latere cylindri, & sub baseos peripheria. (a) Per 8. hujus. (b) Per hanc prop. (c) Per 3. hujus. (d) Per 1. hujus.
- Aliter. Applicetur ad superficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini aequalis, & baseos quae peripheria baseos cylindrica aequatur; & inter se congruent charta atque superficies cylindrica: ideoque (e) aequales sunt. (Est cor. 1. pr. seq.) (e) Per ax. 7. l. 1.
2. Hinc rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis conveniunt, si pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro basibus, cylindricarum basium peripheria, vel etiam quandoque diametri, quae eandem cum peripheriis proportionem (f) habent. Adeoque 1. Cylindrica superficies aequae altae, (g) sunt inter se ut basium diametri. (Est cor. 2. pr. seq.) (f) Per 7. hujus. (g) Per 1. l. 6. & 7. hujus.
2. Quae bases habent aequales, sunt (h) inter se ut latera cylindrorum. (Est cor. 3. p. seq.) 3. Quae similes sunt, (i) erunt in duplicata ratione diametrorum quae in basibus sunt. (Est cor. 4. p. seq.) (h) Per cor. 1. p. 1. l. 6. (i) Per 20. l. 6. & 7. hujus.
4. Et qualibet, (k) sunt inter se in ratione composita ex rationibus laterum, & diametrorum. (Est cor. 5. p. 11.) (k) Per 23. l. 6.
5. Si aequales sint, (l) reciprocant latera & basium diametros; & si reciprocant aequales sunt. (Est cor. 6. p. 11.) (l) Per 14. l. 6.
6. Si latus in baseos peripheriam ducatur, (m) habebitur superficiei cylindrica area. (Est cor. 7. prop. seq.) (m) Per sch. p. 34. l. 1.
3. Cylindri recti superficies CD, est ad basium BN, ut cylindri latus BC est ad BO, quartam partem diametri baseos. Est enim superficies cylindrica (n) aequalis rectangulo sub latere BC & peripheria baseos. Sed basis cylindri (o) aequatur rectangulo sub BO quarta parte diametri baseos & eadem peripheria. (n) Per cor. 1. prins. (o) Per cor.

(a) Per 1. Quare (a) superficies cylindrica erit ad basim, ut BC ad BO.
l. 6. (Est p. 12. infra.)

Fig. 27. 4. Hinc superficies cylindri GK, sphaera circumscripti, cujus nempe altitudo NK aequatur diametro baseos NG, erit baseos quadrupla, sive basium ambarum dupla; nam propter $NK = NG$, erit superficies cylindrica ad basim, ut NK ad $\frac{1}{4}$ NK, sive ut 4 ad 1, sive quadrupla baseos; ac proinde ad utrasque bases ut 4 ad 2, sive basium dupla. Et superficies cylindri EK, hemisphaerio circumscripti, erit baseos dupla, sive duabus basibus aequalis. Si vero latus cylindri fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi aequalis erit. (Est cor. p. 12.)

Fig. 9. & 8. 5. Sit GH media proportionalis inter AB baseos radium, & 2BC, duplum lateris cylindri; eritque circulus radio GH aequalis superficiei cylindrica CD. Nam propter AB, GH, 2BC 2. p. 2. l. 12. $\frac{AB}{GH} = \frac{GH}{2BC}$, erit basis BN ad circulum GPH, (b) ut AB ad 2BC, (c) ut $\frac{1}{2}$ AB ad BC, hoc est, ut (c) basis BN ad superficiem cylindricam CD. Ergo (d) circulus GPH superficiei cylindrica aequalis erit. (Est p. seq.)

l. 5.

Corollaria ex parte secunda prop. 10.

Fig. 10.

6. Coni recti superficies CBD aequatur triangulo sub BG latere coni pro altitudine, & sub peripheria baseos coni CG pro basi. Etenim pyramidum cono sine fine circumscriptarum superficies, semper (e) sunt aequales triangulis, sub latere coni BG pro altitudine, & sub basium pyramidalium perimetris EF pro basibus. Atqui ejusmodi superficies pyramidales in (f) superficiem conicam, & basium pyramidalium perimetri in baseos coni (g) peripheriam tandem desinunt. Adeoque (h) superficies coni aequatur triangulo sub coni latere pro altitudine, & sub peripheria baseos pro basi.

Aliter. Aptetur ad superficiem conicam charta, qua illi ex amissim congruat; & habebit charta illa, in planum extensa, formam sectoris circuli, cujus radius coni lateri, & cujus arcus peripheria baseos coni (i) aequalis erit. Sed ejusmodi sector (k) aequatur triangulo sub dicto sectoris radio pro altitudine, & sub recta qua arcui aequetur pro basi; hoc est, sub latere coni pro altitudine, & sub peripheria baseos coni pro basi. Quare (l) & superficies coni eidem triangulo aequabitur.

(l) Per ax. (Est cor. 1. pr. 13.)

7. & 1. l. 1. 7. Hinc triangulorum proprietates superficiebus conicis rectis conveniunt, si pro triangulorum altitudinibus ponantur conorum latera, & pro basibus basium peripheria (m) vel diametri.

(n) Per 1. Ergo, 1. Superficies conica aequalia latera habentes, (n) sunt

l. 6.

ut basium diametri. 2. Quae bases habent aequales, sunt (a) (a) Per cor.
ut latera. 3. Quae similes sunt, duplicatam (b) habent ratio. 1. p. 1. l. 6.
nem diametrorum quae sunt in basibus. 4. Et qualibet ratio (b) Per 19.
nem (c) habent compositam ex rationibus laterum & diame- l. 6.
trorum quae sunt in basibus. 5. Et quae aequales sunt, (d) re- (c) Per cor.
ciprocant latera & basium diametros; & quae reciprocant. (d) Per 15.
aequales sunt. 6. Habetur (e) denique superficies conica, multi- l. 6.
plicando latus conii in dimidiam baseos peripheriam. (Hae sunt (e) Per schol.
corollaria 2, 3, 4, 5, 6. & 7 pr. 13. infra.) p. 41. l. 1.

8. Coni recti superficies CBD est ad basim, ut conii
latus BC ad baseos radium AC. Est enim superficies conii (f) (f) Per cor.
aqualis rectangulo sub latere BC & dimidia peripheria baseos. 6. prius, &
Sed conii basis (g) aequatur rectangulo sub radio AC & eadem cor. p. 42. l.
peripheria dimidia. Ergo (h) superficies conii erit ad basim, ut 1.
BC ad AC. (Est pr. 14. infra.) (g) Per cor.
1. p. 5. huj.

9. Hinc primo, (fig. 30) superficies conii recti a triangulo
aequilatere circa perpendicularem AK circumactio geniti, baseos l. 6.
QT dupla est. Est enim BK latus conii, semidiametri baseos
AB duplum. 2do, (fig. 27.) superficies conii a triangulo rect-
angulo aequicruri EBD circa perpendicularem AB circumactio
producti, est ad basim, ut in quadrato diameter BD ad la-
latus DA. 3tio, (fig. 27.) superficies cylindri recti GK, est ad
superficiem conii recti GBN, ejusdem baseos & altitudinis, ut
cylindri latus NK ad $\frac{1}{2}$ BN dimidium latus conii. Est enim
superf. GBN ad basim MI, (i) ut BN ad NQ sive (i) Per cor.
 $\frac{1}{2}$ NG; hoc est, ut $\frac{1}{2}$ BN ad $\frac{1}{4}$ NG. Sed basis MI est ad su- 8. prius.
perf. GK, (k) ut $\frac{1}{4}$ NG ad NK. Ergo (l) superf. GBN est ad (k) Per cor.
superf. GK, ut $\frac{1}{2}$ BN ad NK: & (m) invertendo, superficies (l) Per 12.
cylindri GK erit ad superficiem conii GBN, ut latus cylindri l. 5.
NK ad dimidium latus conii, $\frac{1}{2}$ BN. (Hae sunt corollaria 1, (m) Per sch.
2, & 3. pr. 14.) p. 16. l. 5.

10. Sint AC, OL, CB $\div \div$. Erit circulus radio OL & Fig. 10. 11.
qualis superficiei conica CBD. Est (n) enim basis conii CG ad (n) Per cor.
superficiem conicam CBD, ut AC ad CB, hoc (o) est, ut ea- 8. prius.
dem basis conii ad circulum OPL. Itaque (p) circulus OPL (o) Per cor.
superficiei conica aequalis erit. (Est pr. 13. infra.) 2. p. 2. l. 12.
(p) Per 9.
l. 5.

Scholium 2.

Hiscie adjicimus duas propositiones e Galileo desumptas. (q) Per n. 1.

1. Cylindri quorum superficies æquantur, sunt inter se in schol. p.
ut basium diametri directe, vel ut altitudines cylindrorum 15. l. 12.
reciproce. Cylindri enim sunt (q) ut bases & altitudines; hoc (r) Per 2.
(r) est, in duplicata ratione diametrorum in basibus, & sim- l. 12.
plici ratione altitudinum. Sed superficies cylindrica sunt (f) ut (f) Per n.
diametri 10. hujus. 4. cor. 2. p.

- diametri basium & altitudines cylindrorum. Cylindri igitur erunt ut diametri basium & superficies: (nam si ratio diametrorum componatur cum ratione ex diametris & altitudinibus composita, exorietur ratio composita ex duplicata ratione diametrorum & simplici altitudinum.) Cum itaque superficies ponantur aquales, cylindri (a) erunt ut diametri basium directe; vel ut (b) altitudines reciproce.
- (a) Per def. 3. l. 5. & def. 5. l. 6. ponantur aquales, cylindri (a) erunt ut diametri basium directe; vel ut (b) altitudines reciproce.
- (b) Per n. 5. cor. 2. p. 10. Aliter. Sint altitudines A, α ; basium diametri B, β ; erunt hujus. superficies ut (c) $AB, \alpha\beta$; & bases ut (d) $BB, \beta\beta$; ac (c) Per n. 4. cylindri ut (e) $ABB, \alpha\beta\beta$. Sed per hypoth. cylindrica superficies aquantur, hoc est, $AB = \alpha\beta$. Ergo (f) $A:\alpha::\beta:B$. hujus. Et ducendo antecedentes in BB , & consequentes in $\beta\beta$, erit (g) (d) Per 2. $ABB:\alpha\beta\beta::BB\beta:B\beta\beta::$ (h) $B:\beta::$ (i) $\alpha:A$. l. 12.
- (e) Per n. 1. 2. (Fig. 29. & 28. l. 12.) Aequalium cylindrorum (FD, in schol. p. AR) superficies sunt inter se, in subduplicata ratione altitudinum. Hoc est, si inter altitudines ND, BR, ponatur media proportionalis P; erit (k) ND ad P (sive P ad BR) ut superficies cylindri FD ad superficiem cylindri AR.
- (f) Per 16. l. 6. superficies cylindri FD ad superficiem cylindri AR.
- (g) Per 4. l. 5. (sive, per lem. 1. par. 2. l. 5.) Nam propter BR, P, ND $\therefore$, erit $Pq:NDq::$ (l) $BR:ND::$ (m) $VT:M\mathcal{Q}::$ FNq:ABq; & P:ND:: (n) $FN:AB::$ (o) superf. FD:superf. AO. Sed ND (sive BO):BR:: (p) (h) Per 15. superf. AO:superf. AR. Ergo ex (q) aquo, P:BR:: (sive l. 5. ND:P::) superf. FD:superf. AR.
- (i) Prius. Aliter. Si inter altitudines A, α sit M media proportionalis, sintque B, β basium diametri, ut supra; erunt bases ut (k) Per def. 10. l. 5. $BB, \beta\beta$; superficies ut $AB, \alpha\beta$; & cylindri ut $ABB, \alpha\beta\beta$. (l) Per sch. p. 20. l. 6. Et cum cylindri sint aquales, hoc est, $ABB = \alpha\beta\beta$, erit $AB:\alpha\beta::\beta:B$. Et cum per 15. l. 12. sit $\beta\beta:BB::A:\alpha$; (r) erit (m) Per 15. l. 12. $\beta:B::A:M$. Ergo $AB:\alpha\beta::A:M$. $\mathcal{Q}$. E. D.
- (n) Per 35. Corol. Hinc ingentem illam particularum corpora naturalia componentium subtilitatem aliquo modo percipere datum est. l. 5.
- (o) Per n. 1. cor. 2. p. 10. Sit FD cylindrus argenteus superficiem habens deauratam, sive bracteas aureas obductam; quem opifices in auri filum immanis hujus. longitudinis producant. Est nempe altitudo cylindri FD ad fili longitudinem, ut 1 ad 115600; inter quas, media proportionalis, sive $\sqrt{115600}$, est 340. Itaque bractea aurea qua tegitur superficies fili, 340 vicibus tenuior erit quam illa qua (q) Per 22. l. 5. superficies cylindri FD obducitur. Vide Rohault. Phys. par. 1. cap. 9. sect. 11.]
- (r) Per def. 10. l. 5. cum schol. p. 20. l. 6.

Lemma ad sequent.

Fig. 12.

Sint AB, CD, EF proportionales, sitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt.

Recta

Recta KB est ad AB, ut (a) EF ad EG. Rectangulum (a) Per 15. ergo KB, EG æquatur (per 16. l. 6.) rectangulo AB, EF. l. 5.

Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par est quadrato CD. Ergo per 17. l. 6. KB, CD, EG sunt proportionales.

(b) Per 15.

[Aliter. KB:AB::(b)EF:EG. Sed AB:CD::(c)CD: l. 5.

EF. Ergo (d) ex aquo perturbate, KB:CD::CD:EG.]

(c) Ex hyp.

(d) Per 23.

l. 5.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) est medius pro- Fig. 9. & 8.
portionalis inter recti cylindri latus (BC) &
baseos diametrum (BD,) æqualis est superficiei cy-
lindricæ.

Intelligentur circulis ABN, GPH, circumscripta esse [e-
jusdem speciei] ordinata polygona, adeoque familia, NM,
RS; & super NM polygono erectum esse prisma, cylindro
circumscriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. sunt
proportionales, etiam AD (feu AN) GH & dupla BC (e) (e) Per lem.
proportionales erunt. Jam triangulum sub AN & ambitu
polygoni MN contentum, (f) æquatur polygono conscripto (f) Per 4.

NM: rectangulum vero sub BC feu EF & eodem ambitu (g) Patet ex
NM, (hoc est, (g) triangulum sub ambitu NM & dupla cor. p. 42.
BC,) æquale est (h) superficiei prismatis cylindro conscripti. l. 1.

Atqui triangulum sub ambitu NM & AN, est ad triangu- (h) Per 8.
lum sub ambitu NM & dupla BC, (i) ut AN ad duplam hujus.

BC. Ergo etiam polygonum NM est ad superficiem pris- (i) Per 1.
matis cylindro conscripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia l. 6.

jam ostendi AN, GH, duplam BC, esse proportionales,
ratio AN ad duplam BC est duplicata (k) rationis AN ad (k) Per def.
GH. Ergo polygonum NM ad superficiem prismatis ra- 10. l. 5.

tionem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam
polygonum NM ad simile sibi polygonum GRQS, rationem
habet duplicatam rationis AN ad GH, ut facile colligitur ex

1. lib. 12. [Nam ducta GQ, triangula ANK, GHQ (pro-
pter angulos ANK, GHQ rectos, & AKN, GQH polygono-
rum similibus ordinatorum (l) semiangulos) sunt (m) æquian- (l) Per 12.

gula & similia. Ergo AK:GQ::AN:GH. Sed per 1. l. 12. l. 4. cum
polygona sunt in duplicata ratione radiorum AK, GQ, circu- Schol.

lorum quibus ipsa polygona sunt inscriptibilia: ac proinde erunt (n) Per cor.

(n) in duplicata ratione radiorum AN, GH, circulatorum quibus 9. p. 32. l. 1.
eadem polygona circumscribuntur.] Ergo polygonum NM ad (n) Per 11.
super- l. 5.

- superficiem prismatis, & ad polygonum GRQS eandem habet rationem; quæ proinde æqualia (a) sunt. Eodem modo ostendam, prismáticas superficies cylindro in infinitum circumscriptibiles, semper æquales esse polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumscribi possent. Quare cum & superficies prismaticæ (b) in cylindri superficiem, & polygona (c) in circulum GPH definant, etiam cylindri superficies circulo GPH æqualis (d) erit. Quod erat demonstrandum.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis superficiæ cylindricæ.

Corollaria.

Fig. 8. & 9. **S**uperficies cylindri recti æqualis est rectangulo sub latere (BC) & baseos peripheria contento.

- Dupla BC (ut ostensum supra) est ad GH, ut GH ad BA, seu AN; Hoc est, ut (e) peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum sub prima, nempe dupla BC, & quarta, nempe peripheria BN, æquatur (f) triangulo sub secunda GH, & tertia, peripheria scilicet P. Sed triangulum sub GH & peripheria P, æquale (g) est circulo GPH, hoc est, (h) superficiæ cylindricæ. Ergo etiam triangulum sub dupla BC & peripheria BN, (hoc est, (i) rectangulum sub BC & peripheria BN,) cylindricæ superficiæ æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Ex hoc corollario manifestum est rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis esse communes. Esto igitur corollarium

- Fig. 24. & 25. l. 12. 2. Cylindricæ superficies (BM, QN) æque altæ, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.)
- (k) Per cor. 1. Nam rectangula sub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehensa, quibus cylindricæ superficies (k) sunt æquales, sunt inter se (l) ut bases; peripheriæ videlicet CL, SE: hoc est, (m) ut diametri BF, QR.
- Fig. 27. & 28. l. 12. 3. Cylindricæ superficies (CI, AR) quæ bases habent æquales, sunt inter se ut altitudines (TI, BR.)
- Rectangula enim sub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus superficies (n) cylindricæ sunt æquales, sunt inter (o) se ut TI, BR.
- (o) Per 1. l. 6. 4. Similes cylindricæ superficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent basium diametri (BF, QR.)

Cum

Cum cylindri ponantur similes, erit MF ad IQ, (a) ut (a) *Per def.*
BF ad QR, hoc est, (b) ut periphēria CL ad periphēriam SE. Quare etiam rectangula sub periphēriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta, similia (c) erunt; ac proinde rationem inter se habebunt (d) duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ; hoc est, BF ad QR. Ergo & cylindricæ superficies, &c.

5. Cylindricæ superficies (BM, RI) rationem inter se habent (e) compositam ex rationibus laterum (FM, IQ) & diametrorum (BF, QR) quæ sunt in basibus.

6. Si æquales sunt cylindricæ superficies (AR, FD;) erit ut diameter AB ad diametrum FN, ita (f) reciproce altitudo FH ad altitudinem RB: & e converso.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ superficiei dimensio; si nimirum altitudo ducatur in baseos periphēriam. Ut si altitudo sit pedum 20, periphēria basis pedum 6. multiplica 20. per 6. proveniunt 120. pedes quadrati pro cylindrica superficiei.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti superficies est ad basim (ABN,) ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam partem diametri baseos.

Sit GH media proportionalis inter BC & BD diametrum basis, ac proinde etiam media (g) proportionalis inter BA seu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH, æquatur curvæ superficiei (h) cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad cylindri basim ABN, rationem habet duplicatam (i) rationis GH ad AN; hoc est, (k) eandem quam dupla BC ad BA radium; hoc est, eandem quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam superficies cylindrica est ad basim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro basis æquale, baseos quadrupla est. Si vero latus fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. Utrumque ex propositione manifestum est.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Fig. 11. &
10.

Circulus, cujus radius (OL) est medius proportionalis inter conii recti latus (BC) & basis radium (AC,) æqualis est superficiei conica.

Intelligentur circulis ACG, OPL circumscripta esse polygona ordinata [similia] EF, IN, & super polygono EF erectam est pyramidem cono circumscriptam.

- Quoniam per hyp. AC seu AG est ad OL, ut OL ad BC, (a) Per def. erit ratio AG ad BC duplicata (a) rationis AG ad OL. Sed 10. l. 5. ut AG ad BC, ita triangulum sub AG & ambitu EF est ad triangulum sub BC & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli sub AG & ambitu EF ad triangulum sub BC & eodem ambitu, est etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed (b) Per 4. triangulum sub AG & ambitu EF æquale est (b) polygono hujus. EF: & triangulum sub BC & eodem ambitu EF æquale (c) (c) Per 9. est superficiei pyramidis circumscriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad superficiem pyramidis etiam est duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum sibi per constr. simile IN, est duplicata (d) rationis (d) Colligimur exp. 1. l. AG ad OL, [uti constat ex iis quæ demonstrationi prop. 11. l. 12. inferuntur.] Ergo polygonum EF, ad superficiem pyramidis & ad polygonum IN eandem habet rationem, quæ (e) Per 9. proinde æqualia (e) erunt. Eodem modo ostendam superficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magisque polygonæ circumscribi possunt, semper æquales esse polygonis quæ circulo OPL possunt circumscribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum (f) superficies in conii (f) Per 10. superficiem, & polygona in circulum (g) OPL tandem de- hujus. finant, etiam conii (h) superficies & circulus OPL erunt æ- (g) Per 3. qualia. Quod erat demonstr. hujus. (h) Per 1. Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus superficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

Fig. 10. &
11.

Recti conii superficies æqualis est triangulo, sub conii latere (BC) & baseos peripheria (CG) comprehenso.

Sit

Sit OL radius media proportionalis inter AC & BC.
 Quia peripheria CG est ad peripheriam P, ut (a) radius AG ad radium OL; hoc est per hyp. ut OL ad BC: erit triangulum sub prima, nempe peripheria CG, & sub quarta BC, (b) æquale triangulo sub secunda, nempe peripheria P, & tertia OL; hoc est, (c) circulo OPL, hoc est, (d) superficiei conicæ BCD. Quod erat demonstrandum.

Ex hoc corollario liquet superficies conicas triangulorum 13. subire leges. Itaque

1. Superficies conicæ (BAF, QXR) æqualia latera (BA, QX) habentes, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.)
3. Et (CFT, AZB) quæ bases habent æquales, sunt inter se ut latera (CF, AZ.)
4. Et quæ similes sunt (BAF, QZR,) duplicatam habent rationem ejus, quæ est inter basium diametros.
5. Et quælibet, rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum (BF, QR) quæ sunt in basibus.

6. Et quæ æquales sunt, reciprocant latera & basium diametros; & quæ reciprocant, sunt æquales.

Quæ omnia demonstrantur ex coroll. 1. ut supra corollaria de cylindrica superficie deduximus ex corollario isthic primo.

7. Metiemur denique conicam superficiem, si latus FC per baseos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut si latus sit pedum 5. peripheria baseos pedum 20. duc 5. per 10. proveniunt 50. pedes quadrati pro conica superficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PROPOSITIO XIV.

Coni recti superficies est ad basim, ut latus (BC) ad basis radium (AC.)

Inter latus BC & basis radium AC, sit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC est duplicata (e) rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL est æqualis superficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni basim ACG est duplicata (g) rationis OL ad AC; ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio superficiei conicæ CBD est ad basim ACG, ut BC ad AC. Quod erat demonstrandum.

Corol.

Corollaria.

Fig. 30.

Superficies conii recti a triangulo aequilatero circa perpendiculararem (KA) circumducto geniti, baseos (QT) dupla est.

Est enim KB latus æquale BD , adeoque duplum semissis AB , quæ baseos radius est.

Fig. 27.

2. Superficies conii a rectangulo triangulo æquicruri (EBD) producta, est ad basim, ut in quadrato diameter ad latus.

(a) Per n. 1.

schol. p. 26.

l. 1.

(b) Per cor.

11. p. 32. l.

1.

(c) Per 6. l.

1.

(d) Per n. 1.

schol. p. 26.

l. 1.

Fig. 27.

3. Superficies cylindri recti (GK) est ad superficiem conii recti (GBN), ut cylindri latus ad dimidium latus conii.

Nam superficies conii GBN est ad basim MI , ut latus BN ad (e) semidiametrum basis QN ; hoc est, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN . Est autem basis MI ad superficiem cylindri GK , ut (f) quarta pars diametri ad NK cylindri latus. Ex æquo igitur superficies conica GBN est ad superficiem cylindricam GK , ut dimidium latus conii ad cylindri latus NK . Quod erat demonstrandum.

Lemma ad sequen.

Fig. 12.

IN triangulo NPV ducta sit QD parallela ad NV . Dico rectangulum sub PN & NV , æquari rectangulo sub PQ , QD , una cum rectangulo sub NQ & duabus simul sumptis NV , QD .

Duc

Duc lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA secet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN est par NV, [& quoniam (a) $AN:QB::NP:QP::NV:QD$,] patet etiam (b) QB esse parem QD. Igitur rectangulum ON est rectang. PNV, & FQ est PQD. Restat ut probemus rectangula OB, EC, BN æquari rectangulo sub NQ & duabus NA, QB; hoc est, sub NQ & duabus NV, QD. Id vero est manifestum: l. 5. rectangulum enim sub NQ & NA, QB, æquatur (c) his tribus rectangulis; sub NQ & CA, (hoc est, spatio EC,) sub NQ & NC, (hoc est, spatio BN,) sub NQ & QB, hoc est rursus, spatio BN, ac proinde spatio OB, quod ipsi BN (d) æquale est. Liquet ergo propositum.

(d) Per 4.
l. 1.

PROPOSITIO XV.

SI conus rectus sectus sit plano QSR basi NZO Fig. 14. 6.
parallelo; Dico circulum GHM, cujus radius
GH est medius proportionalis inter partem lateris NQ,
& circulorum QSR, NZO radios QD, NV simul
sumptos, æqualem esse superficiei conicæ inter parallelos
circulos QSR, NZO interceptæ.

Inter PN & NV media sit GF. Item inter PQ & QD sit media GK; describanturque circuli GFL, GKT. Erit hic (e) æqualis superficiei conicæ QPR, ille superficiei NPO. Rectangulum PNV æquatur (f) rectangulo PQD, una cum rectangulo sub NQ & NV, QD simul sumptis. Sed quia (g) GF media est proportionalis inter PN, NV, rectang. PNV est æquale (h) quadrato GF: Et quia GK est (i) media inter PQ, QD, rectang. (k) PQD æquatur quadrato GK: Et quia GH media (l) est inter QN, & QD, NV simul sumptis, rectangulum sub QN, & QD, NV simul sumptis, æquale est (m) quadrato GH. Ergo quad. GF par quoque est quadratis GH, GK. Ergo, cum circuli sint inter se ut (n) quadrata radiorum, erit quoque circulus GLF æqualis duobus circulis, GKT & GHM. Atqui circulus GLF est æqualis (o) superficiei conicæ NPO. Ergo etiam superficies conica NPO æquatur duobus circulis GKT & GHM. Atqui superficiei NPO pars una QPR est circulo GKT. Ergo reliqua, inter parallelos circulos

ZZ, SS

ZZ, SS comprehensa, æquatur circulo GHM. Quod erat demonstrandum.

[Corol. Hinc ex datis circulorum parallelorum radiis NV, QD, & superficiei conica inter circulos intercepta latere NQ, habetur superficiei illius dimensio, si radiorum summa NV + QD per latus NQ multiplicetur, & facti radix quadratica extrahatur. Erut enim ut 113 ad 355, ita radix ista ad terminum quartum. Quo termino in radicem illam ducto, exoritur superficies conica quasita. Patet ex 17.l. 6. & schol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 5.]

Lemma ad sequen.

Fig. 16. **R**ectæ (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, sunt parallelæ.

Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. (a) Per 29. sunt æquales, etiam (a) anguli BHC, GCH alterni æquales l. 3. erunt. Ergo (b) BH & CG sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum. (b) Per 28. l. 1.

[Scholium. Hinc oritur methodus facillima ducendi per punctum datum B, rectæ datæ CG parallelam BH, uti supra ad prop. 31. l. 1. notatum est.]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 16. **I**nscribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera, [cujus latera quaternarius metiatur;] ducaturque EB ab extremitate diametri ad B terminum lateris diametro proximi; angulos vero æqualiter distantes ab A jungant rectæ BH, CG, DF:

Dico rectangulum quod diametro AE, & subtensa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inscriptæ (AB, vel BC, &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis.

(c) Per 26. l. 3.

(d) Per lem.

præc.

(e) Per 27.

& 15. cmm

cor. 9. p. 32.

l. 1.

(f) Per 4.

l. 6.

Duc CH, DG. Quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus (c) æquales BC, HG; CD, GF; erunt (d) parallelæ. Pari argumento parallelæ sunt BA, CH, DG, EF. Omnia igitur triangula (e) BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula sunt. Ergo (f) ut BK ad KA, sic HK ad KL; & ut

& ut HK ad KL, sic CM ad ML; & ut CM ad ML, sic GM ad MN; & ut GM ad MN, sic DO ad ON; & ut DO ad ON, sic FO ad OE. Ergo (a) ut una antecedentium BK ad unam consequentium KA; sic omnes antecedentes BK, KH, CM, MG, DO, OF, (hoc est, omnes jungentes BH, CG, DF) sunt ad omnes consequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE, hoc est, ad diametrum AE. Sed ut BK ad (b) AK, sic EB est ad BA. Ergo ut omnes simul BH, CG, DF ad AE, sic EB est ad BA. Ergo (c) rectangulum sub omnibus jungentibus BH, CG, DF & sub BA, æquatur rectangulo sub AE & EB. Quod erat demonstrandum.

[Cor. 1. Omnes jungentes BH, CG, DF, a diametro AE bifariam & perpendiculariter secantur. Nam in triangulis BAK, HAK, propter latera BA, AK lateribus HA, AK æqualia, & angulos ad A æquales, erit BK = KH, & anguli ad K æquales, & proinde recti. Et eodem modo ad jungentem quamvis aliam GG, ductis AG, AG, ostendetur esse CM = MG, & angulos ad M rectos.]

Cor. 2. Si jungens CG sit diameter circuli; angulus CGH a jungente & latere proximo comprehensus, acutus erit. Ducta enim CH, angulus CHG in semicirculo rectus est, inde angulus HGC acutus.

Si vero recta jungens sit diametro minor, ut BH; angulus ABH ad partem segmenti minoris, a latere figura inscripta AB, & jungente BH comprehensus, etiam acutus erit. Est enim angulus super arcu AH in segmento majore ABEH.

Cor. 3. Sit CAG aut semicirculus, aut segmentum semicirculo minus, a jungente CG terminatum: latera CB, GH, jungenti proxima, ad partem segmenti CAG, si ultra B, H, satis producantur, concurrent; & concursu formabunt triangulum isosceles super basi CG, cujus vertex erit in aliquo diametri EA, ultra A producta, puncto.

Nam propter angulos BCG, CGH duobus rectis minores, recta CB, GH ultra B & H producta, concurrent. Et propter arcus BAHG, CBAG æquales; iidem anguli BCG, CGH erunt æquales; & proinde latera CB, GH concursu suo formabunt triangulum isosceles super basi CG. Et quoniam am basis a recta AM bifariam & perpendiculariter secatur; ipsa MA producta, per trianguli verticem ibit.]

PROPOSITIO XVII.

Fig. 17.

Segmento circuli DAF , cujus basis DF perpendicularis sit diametro AOE , inscribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta EB :

Dico rectangulum sub EB & parte diametri AO , quæ segmenti axis est, comprehensum, æquari rectangulo sub latere uno figuræ inscriptæ, & omnibus junctibus BH , CG , una cum DO dimidio basis DF simul sumptis comprehenso.

Demonstratio eadem quæ præcedentis.

[Est enim $AB:BE::AK:KB::LK:KH::LM:MC::NM:MG::NO:OD$. Ergo $AB:BE::AK+KL+LM+MN+NO:BK+KH+CM+MG+DO$; hoc est, $AB:BE::AO:BH+CG+DO$. Ergo $EB \times AO = AB \times BH+CG+DO$.

Fig. 20.

Scholium. Si segmento DAF ejusmodi figuram æquilateram & parilateram $DHAGF$ inscribi contigerit, ut latera duo opposita DH , FG sint axi AO & sibi invicem parallela; manifestum est illa circa eundem axem AO (secundum lemmata subsequents) circumacta, superficiem cylindricam (non conicam) generatura. Et quantvis eo etiam in casu valeret hæc propositio, & (ex p. 11. hujus cum p. 15. collata) ad prop. 19. demonstrandam æque accommodari posset; ut tamen eadem ubique conferretur demonstrandi ratio ac forma, & quod in prop. 18, 20, & 22. de superficiebus conicis asseritur, idem de solis conicis (& non de conicis cum cylindrica) affirmari possit in prop. 19, 21, & 23; præstiterit forte, quancūque latera opposita DH , FG axi AO parallela sunt, arcus omnes DH , HA , &c. bisecando, figuram duplo plurium laterum (ut $DCHBA$ &c.) eidem segmento inscribere, quo latera omnia figuræ, segmento DAF inscriptæ, (cum ad axem AO inclinentur,) ex circumvolutione segmenti ac figuræ inscriptæ circa eundem axem, superficies conicas generare valeant.]

Lemma 1. ad sequen.

Fig. 16.

Inscripta sit sphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem AE consistens: Quo manente, circulus cum figura circumagatur:

Dico

Dico sphæræ inscriptum iri corpus conicis rectis superficiibus contentum.

Quod BA, HA, item DE, FE describant integras conorum rectorum superficies, manifestum (a) est. Deinde quia lineæ CB, GH, & GF, CD concurrunt (b) productæ in eodem utrimque puncto diametri AE similiter protractæ, quæ jungentes secant normaliter [*& bifariam*]: etiam liquet has describere partes superficierum rectorum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quorum peripherias in sphærica superficie describunt vertices angulorum B, C, D.

(a) Vide def.
2. l. 12.
(b) Per cor.
3. p. 16. huj.

Lemma 2.

Segmenti sphæræ, cujus axis AO, sectio maxima esto Fig. 17. DAF. Huic inscripta sit figura æquilatera [*& parilatera*] dempta basi, [*ita tamen, (c) ut nullum figura inscripta latus sit axi AO parallelum,*] quæ [*cum segmento*] circa axem AO in orbem convertatur: Post pr. 17. hujus.

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiibus contentum.

Probatur ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

Ponantur eadem quæ in primo lemmate; & ducatur recta EB, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi: Fig. 16.

Dico omnibus superficiibus conicis sphærae inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius (I) potest rectangulum AEB, comprehensum videlicet, sub diametro AE, & subtensa EB; [nimirum ut sit $Iq = AE \times EB$.]

Hoc est, cujus radius (I) est medius proportionalis inter AE & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis (d) BK, CM, (d) Per cor. DO bis sumptis, erit (e) rectangulum sub latere uno figuræ inscriptæ maximo circulo, (videlicet sub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & sub omnibus simul jungentibus BH, CG, DF, æquale rectangulo sub AB & BK, sub BC & composita ex BK & CM, sub CD & composita ex CM & DO, sub DE & DO; sic enim rectæ BK, CM, DO singulæ fu-

(d) Per cor.
1. p. 16. huj.
(e) Per 1.
l. 2.

- erunt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub AB & omnibus
 (a) *Per 16.* jungentibus BH, CG, DF simul sumptis æquatur (a) rect-
hujus. angulo AEB, hoc est (b) quadrato I. Ergo quadratum I
 (b) *Per hyp.* æquale est rectangulis sub AB & BK, sub BC & composita
 ex BK, CM, sub CD & composita ex CM, DO, sub DE &
 DO. Sint jam inter AB & BK, media proportionalis P;
 inter BC & compositam ex BK, CM, media Q; inter CD
 & compositam ex CM, DO, media R; inter DE & DO
 (c) *Per 17.* media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia (c)
l. 6. rectangulis supradictis. Quare cum quadratum I jam o-
 stenderim iisdem æquari rectangulis; etiam quadratis P, Q,
 (d) *Per cor.* R, S æquale erit. Cum igitur circuli sint inter se (d) ut
2.p. 2. l. 12. quadrata radiorum; etiam circulus radio I descriptus, omni-
 (e) *Patet ex* bus simul circulis quorum radii P, Q, R, S, æqualis (e) erit.
cor. 2. p. 2. Atqui circuli radiorum P & S, æquantur (f) superficiebus
l. 12. & p. conicis quas produxerunt latera AB, ED, siquidem P est
24. l. 5. media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium
 (f) *Per 13.* baseos; S vero media est inter ED & DO: & circulus
hujus. radii Q est æqualis segmento (g) superficiei conicæ quæ in-
 (g) *Per 15.* tercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG,
hujus. BH, quia Q media est inter BC, & compositam ex BK,
 CM; & ob eandem causam circulus radii R æquatur seg-
 mento superficiei conicæ inter parallelos circulos diametro-
 rum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus,
 æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphæræ inscri-
 ptis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17.

Ponantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur
 recta EB ab extremitate diametri AE ad ter-
 minum lateris AB diametro proximi:

Dico omnibus superficiebus conicis segmento spha-
 rico DAF inscriptis æqualem esse circulum, cujus
 radius est medius proportionalis inter EB & segmen-
 ti axem AO.

Demonstratio plane eadem quæ præcedentis. sed pro P.
 16. citetur P. 17.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Superficies conica sphaera inscripta, in sphaera su- Fig. 18.
perficiem desinunt.

Data sit superficies quantumvis parva X. Manifestum est intra sphæricam superficiem ACEG dari aliam posse concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quam sit X. Ambarum plano sectarum per centrum, maximi circuli sint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE bisecetur in C, & residuum bisecetur rursus, [*sed in fig. 18. arcus quadrantalibus AC trifecatur, quod etiam fieri posse patet ex cor. 3. p. 15. l. 4.*] & sic deinceps, relinquetur (a) tandem arcus AB minor arcu AN. (a) Patet ex Huic si subtendatur recta AB, manifestum est eam non per- lem. 2. schol. tingere ad peripheriam PDML, esseque latus figuræ æqui- post 11. l. 6. lateræ & parilateræ circulo CAGE inscriptæ, [*cujus latera quaternarius metiatur, &c.*] cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare si circa diametrum AE in orbem agantur omnia, patet superficiei sphæricæ exteriori inscribendas esse conicas superficies, quæ includant superficiem sphæricam alteri concentricam, ac proinde illa sint (b) majores. Quoniam igitur sphærica superficies DPLM, (b) Per axio. deficit a superficie sphærica ACEG quantitate minori quam 3. hujus. sit data X; multo magis superficies conicæ ab eadem sphærica ACEG, deficient quantitate minori quam sit data X, ac proinde (c) in ACEG superficiem desinent. Quod erat de- (c) Per def. monstrandum. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXI.

Conica superficies segmento sphaerico DAF in- Fig. 19.
scripta, in ipsam segmenti sphaericam superfi-
ciem desinunt.

Demonstrabitur eodem fere ratiocinio quo præcedens.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 19.

DEmonstratum est propof. 18. circulum cujus radius est medius proportionalis inter diametrum AE , & rectam EB , quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiibus conicis sphaeræ inscriptis.

(a) Vide def. 6. l. 12. Dico hunc circulum definere (a) tandem in circulum, cujus radius est AE sphaeræ diameter.

Nam si plura semper ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producant superficies,) patet latus AB fieri tandem quavis data recta minus, ac proinde subtensam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit, ut differentia ipsarum AE , BE etiam fiat quavis data minor. Ergo multo magis media proportionalis inter AE & BE , quæ semper major est quam BE , differet ab AE tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus cujus semidiameter est media inter AE & BE , a circulo cujus radius est AE , tandem differet defectu minori quocunque dato: hoc est, in (b) ipsum definit. Quod erat demonstrandum.

(b) Per def. 6. l. 12.

Hæc per se satis clara, non est necesse operosius demonstrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 20.

DEmonstratum est propof. 19. circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO segmenti axem, æqualem esse omnibus superficiibus conicis portioni sphaericæ DAF inscriptis.

Dico hunc circulum definere in circulum, cujus radius est recta AD , a segmenti vertice ducta ad peripheriam circuli $DQFN$, qui basis est segmenti.

Nam quia jam ex præced. demonst. liquet EB definere tandem in AE , patebit quoque mediam proportionalem inter

ter EB & AO, definire tandem in mediam proportionalem inter AE & AO; hoc (a) est, in ipsam AD. Manifestum est (a) *Per cor.* igitur & circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO etiam definire in circulum radii AD. Quod erat demonstrandum. *2. p. 8. l. 6.*

Lemma ad sequen.

SI diameter diametri dupla est, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propof. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5. [*vel ex cor. 3. p. 2. l. 12.*]

PROPOSITIO XXIV.

CUJUSCUNQUE sphaerae superficies quadrupla est maximi circuli ejusdem sphaerae. *Fig. 19.*

Hoc nobilissimum Archimedis theorema ex jam praemissis expedite demonstrabimus hunc in modum.

Circulo sphaerae maximo circa diametrum AE intelligatur inscripta esse figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur; quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas superficies superficiei sphaericae inscriptas, ducaturque EB. Demonstratum jam supra (b) est, omnes conicas superficies sphaerae inscriptas æquales esse circulo, cujus radius potest rectangulum AEB, hoc est, cujus radius est medius proportionalis inter AE & EB. Atque hoc semper eveniet, inscriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inscriptæ conicæ superficies (c) tandem definant in sphaericam superficiem, circulus vero cujus radius est medius inter AE & EB, definat (d) in circulum cujus radius est AE; ipsa quoque sphaerica superficies (e) æqualis erit circulo radii AE, hoc est, (f) quadruplo maximi circuli ACEG. Quod erat demonstrandum. *(b) Per 18. hujus. (c) Per 20. hujus. (d) Per 22. hujus. (e) Per 2. hujus. (f) Per lemmæ præc.*

Viam, qua in theoremate nobilissimo demonstrando hactenus usi sumus, Archimedeo multo breviorẽ & clariorem esse sciet, qui Archimedeo legerit.

Corollaria.

1. EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphaericae, is nimirum cujus semidiameter est sphaerae diameter, sive cujus diameter dupla est diametri sphaerae.

[Cor. 2.]

[Cor. 2. Hinc etiam, & e p. 2. l. 12. sum p. 15. l. 5. sphaerarum superficies sunt inter se in ratione duplicata radiorum qui in sphaeris sunt.]

Scholium.

EXpedita jam erit dimensio superficiei sphaericae, principis inter omnes curvas. Duplex est modus.

1. Mensuretur circulus sphaerae maximus, (ut traditur in scholio post P. 6. hujus,) & multiplicetur per 4. Ut si maximus orbis terrae circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horae sive Belgica 5,940000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23,760000. quae in superficie orbis terrae continentur.

2. Diameter sphaerae multiplicata per circumferentiam maximi circuli, exhibet sphaerae superficiem. Ut si terrae diametro dentur milliaria unius horae $2750\frac{1}{7}\frac{4}{1}$, atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri, omitta fractione, multiplicati per invicem, dabunt rursus quadrata milliaria unius horae, 23,760000. totam orbis terrae superficiem constituentia.

Demonstratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus: rectangulum enim sub diametro sphaerae, & maximi circuli circumferentia, per dictum coroll. est quadruplum maximi circuli.

[De numeris in hoc scholio memoratis vide quae monuimus in schol. post p. 6. hujus.]

PROPOSITIO XXV.

Fig. 20.

Cujuscunque portionis sphaericae (*DAF*) superficies aequalis est circulo, cujus radius est recta (*AD*) a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (*DQFN*) qui portionis est basis.

[1. Pars.] Portionis maximae sectioni, inscripta cogitetur circa axem *AO*, figura æquilatera & parilatera basi dempta. (a) Vide sch. [cujus nullum latus sit axi (a) parallellum;] quæ circa *AO* p. 17. hujus. in orbem acta, portioni inscribet conicas superficies. Ducatur quoque recta *EB*, ut (b) supra. Omnes conicae superficies segmento sphaerico jam inscriptæ æquantur (c) circulo, (c) Per 19. hujus. cujus radius est medius proportionalis inter *EB*, & segmenti axem *AO*. Atque hoc, multiplicatis in infinitum inscriptionibus, semper continget. Quare, cum & conicae superficies segmento inscriptæ, definant (d) in sphaericam segmenti superficiem

perficiem, & circulus cujus radius inter EB & AO medius est, definat (a) in circulum radii AD; etiam (b) sphaericae portionis superficies DAF, circulo radii AD aequalis erit. Quod erat demonstrandum. (a) Per 23. hujus.
(b) Per 2. hujus.

[2. Pars. Sit ED recta a vertice E portionis sphaerica minoris DEF ad circumferentiam baseos ducta, & jungatur AD. Propter (c) angulum ADE rectum, (d) erit circulus radio AE aequalis summa circulorum radiis AD, ED respectue descriptorum. Sed circulus radio AE (e) aequatur toti superficiei sphaericae, & circulus radio AD (f) aequatur portionis majoris DAF superficiei. Ergo circulus radio ED, portionis minoris DEF superficiei aequabitur.] (c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor. 8. p. 2. l. 12.
(e) Patet ex dem. p. 24. hujus.
(f) Per 1. partem huj. prop.

Hoc alterum est ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac praecedens, via multo, quam ipse, breviori ac clariori jam demonstravimus.

[Cor. Hinc datis sphaera diametro AE, & portionis sphaericae DAF axe AO, (vel datis axe AO, & OD basis radio,) habetur AD radius circuli, qui portionis sphaericae superficiei aequatur, atque inde dabitur superficiei portionis sphaericae dimensio. Cum enim sint (g) AE, AD, AO $\div$, erit (h) $AD = \sqrt{AE \times AO}$; (vel propter triangulum rectangulum AOD, erit (i) etiam $AD = \sqrt{AOq + DOq}$.) Si igitur fiat 113 ad 355, ut AD ad terminum quartum; hic terminus per AD multiplicatus, dabit aream, portionis sphaericae superficiei aequalem. Patet ex hac, & schol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 5.] (g) Per cor. 2. p. 8. l. 6.
(h) Patet ex 17. l. 6.
(i) Patet ex 47. l. 1.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti sphaerae circumscripti (HPSV) Fig. 21. superficies, aequalis est superficiei sphaerae.

Et si cylindrus ac sphaera secentur planis ad axem (BG) rectis, erunt singulae superficiei cylindricae segmenta, segmentis singulis superficiei sphaericae aequalia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP aequale est (k) PS (k) Per hyp. diametro basis; erit cylindrica superficies HS, quadrupla (l) baseos, hoc est, maximi circuli sphaerae cylindro inscriptae; cujus cum etiam (m) quadrupla sit sphaerae superficies, erit haec aequalis cylindricae. Quod erat demonstrandum. (k) Per hyp. l. 3.
(l) Per cor. p. 12. hujus.
(m) Per 24. hujus.

2. Pars. Ducantur rectae BO, GO. Quoniam angulus BOG (n) rectus est in semicirculo, ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG; erit (o) BO media proportionalis inter GB & (n) Per 31. l. 3.
(o) Per cor. 2. p. 8. l. 6.

GB & BC, hoc est, inter IT & HI. Ergo circulus radii
 (a) *Per 11.* BO (a) æqualis est superficiei cylindricæ HT. Sed idem
hujus circulus æqualis (b) est etiam segmento superficiei sphericæ
 (b) *Per præc.* OBK. Æquales igitur sunt superficies, cylindrica HT, &
 spherica OBK.

Deinde, quia eodem modo ostenditur cylindrica HX æ-
 quari sphericæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ
 sphericæ QOKR, inter duos parallelos circulos interceptæ,
 æqualis erit.

Ex his pater de segmentis omnibus.

[Coroll. Hinc superficies cylindri spheræ circumscripti, est
 dupla basium.]

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 21. **S**egmenta superficiei sphericæ parallelis circulis di-
 vise, eam inter se proportionem habent, quam
 segmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad
 circulos parallelos rectæ.

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphericæ superficiei
 (c) *Per præc.* segmenta OBK, QOKR, MQRN, &c. (c) æqualia cylin-
 dricis, HT, IX, LN, &c. Atqui hæc eandem inter se ra-
 (d) *Per 13.* tionem habent, (d) quam axis segmenta BC, CD, DA, &c.
 l. 12. Ergo & illa. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

EX hac innotescit proportio zonarum & climatum inter
 se. Sunt enim ad invicem ut segmenta axis, quæ nota
 sunt ex tabula sinuum.

Ex eadem habetur dimensio segmentorum superficiei sphæ-
 ricæ. Nam quia & tota sphæræ superficies nota est ex scho-
 lio prop. 24. & segmentorum proportio, utpote eadem
 quæ partium axis, etiam datur; liquet segmenta singula in-
 notescere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua
 omnia quæ sequuntur, omnino singularia atque admiranda
 sunt, planeque digna, ad quæ intelligenda, Geometriæ stu-
 diosi ardenti studio incumbant.

Lemma ad sequent.

Fig. 22. **S**I sphæram tangat planum (QN in O,) recta (AO) ex
 centro ad contactum ducta, est plano tangenti perpen-
 dicularis. Secentur

Secentur planum tangens QN & sphaera, per [centrum A &] tactum O, duobus planis [quorum sectio communis erit AO, &] quæ in sphaera quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingent (a) in O. Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis est ad utrumque IO, CO, ac proinde per 4. l. 11. ^{(a) Per def. 2. l. 3.} recta plano QN. Quod erat demonstrandum.

[Coroll. Hinc colligimus globum perfecte politum, in plano horizontali perfecte polito QN Tellurem in O tangente positum, quiescere non posse, nisi in puncto contactus O collocetur. Ex, gr. Globus ad I positus, ob gravitatem suam & plani declivitatem descendet versus O. Nam ducta AI, in triangulo rectangulo AOI, latus AI angulo recto oppositum, major est (b) quam AO, ^{(b) Per 19. l. 1. & cor. 5. p. 32. l. 1.} adeoque globus ad I magis distat a centro quam ad O, & proinde globus ad I quiescere nequit, sed versus O descendet: Neque aliter fluidorum descensum, atque in superficiem sphericam conformationem probamus.] /m

Lemma ad confect. 3. in schol. seq. Sint O, P, Q trium circulorum peripheria, & R, S, T eorum radii respectivæ; sitque $R-S=T$: Erit $O-P=Q$.

Nam $O:P::(c) R:S$; & $P:Q::S:T$. (d) Ergo $O-P::(c) R-S$; Sed $R-S=T$. Ergo $O-P=Q$. ^{(c) Per 7. hujus. (d) Per cor. 2. p. 22. l. 5.}

Scholium. Cum plana per centrum terra transeuntia, in quibus omnia ad horizontem recta consistunt, circulos magnos & aequales in terra superficie generent, lauta nonnulla conjectaria ex autore nostro in Astronomia sua (g) apponemus, quæ ex circulorum natura facillime possunt intelligi. ^{(e) Per hyp. (f) Per def. 5. l. 5. (g) Lib. 1. cap. 2. num. 6.}

1. Si qua sui parte superficies terra esset perfecte plana, non magis possent homines in ea recti consistere quam in clivo montis: excepto nimirum contactus puncto. ^{Fig. 27. l. 3.}

2. Caput viatoris plus itineris conficit quam pedes: item qui eques eandem viam proficiscitur, plus quam qui pedes. Item in navi, pars suprema mali plus via percurrit quam inferior.

3. Si quis totum orbis circumductum peragrasset, iter ejus a capite confectum superaret iter confectum a pedibus peripharum differentia, quæ (h) æqualis est circumductui circuli cujus radius est ipsa hominis statura. ^{(h) Per lem. ad hoc conf.}

4. Vas aqua plenum si ad perpendicularum efferatur in altum, continuo aliquid ex eo effluet, & tamen manebit plenum: quia scilicet, superficies aquæ in partem majoris sphaera continuo comprimetur. Imo si vas in altum sine termino efferatur, superficies

ficies aqua in eo contenta descendet sine termino versus planum per margines ductum; neque tamen unquam ad planum istud perveniet.

5. Si vas aqua plenum recta deorsum feratur, quamvis nihil effluat, tamen desinet esse plenum: quia scilicet aqua superficies in partem minoris sphaera continuo tumescet. Ex quo sequitur,

6. Unum idemque vas plus aqua continere in pede montis quam vertice; plus etiam in cella subterranea quam in cubiculo. Quibus adde,

Fig. 27. l. 3. 7. Duos funiculos, de quibus duo globuli ferrei in perpendiculari penduli sint, [et proinde edificiorum muros juxta perpendiculara erectos] non esse inter se parallelos: sed partes radiorum terrae, in centro coeuntium.]

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 23. 25. & 24. **O**mnis sphaera aequalis est cono (ZO) cujus altitudo (KO) par est radio sphaerae, basis vero (Z) superficiei sphaerae aequalis.

Intelligatur sphaerae circumscriptum esse corpus aliquod polyedrum, cujus solidi anguli novis planis sphaeram tangentibus abscindantur. Quo facto, oriatur aliud corpus polyedrum sphaeram continens, minus priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compositam. Si polyedri hujus solidi anguli novis planis tangentibus iterum abscindantur, & tertii polyedri inde nati similiter; atque ita in infinitum: fiet tandem ut & polyedrum excedat sphaeram solido minori quocunque dato, & superficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, sine termino & minora, & plura erunt) composita, sphaericam superficiem excedat quoque, plano minori, dato quocunque. Quod utrumque, licet demonstrari posset, tamen quia per se satis clarum, postuletur studio brevitatis. His ita constitutis, quaesitum ita concludemus.

Polyedrum jam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphaerae, bases vero sunt plana tangentia, quæ polyedri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ, ad plana (a) singula perpendiculares sunt; erunt omnium pyramidum, quibus constat polyedrum, æqualis altitudo, ipse nimirum AB radius sphaerae. Si jam igitur planum

(a) Per lem.
præc.

num X ponatur æquale superfici ei ipsius polyedri, superque eo erecta sit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem sphaeræ radio AB , manifestum est (a) omnes pyramides supra dictas, hoc est, totum polyedrum, æquari pyramidi XN . ^{(a) Patet ex dem. p. 6. l. 12.}
Ad eundem modum reliqua omnia polyedra sphaeram includentia, quæ ex truncatione perpetua solidorum angulorum, alia atque alia nascentur in infinitum, semper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræsentatis) quarum altitudines (MN) sunt radius sphaeræ, bases vero (X) æquales superficiebus polyedrorum, sphaeram ambientibus. Quare cum tandem, & polyedra (ut dixi supra) in sphaeram, & pyramides XN (ut mox ostendam) in conum ZO desinant; etiam (b) sphaera cono æqualis erit. Quod erat demonstrandum. ^{(b) Per 1. hujus.}

Quod autem pyramides XN (c) desinant in conum, sic (c) Vide def. ostendo. Polyedrorum superficies desinunt in sphaeræ superficie, ut postulatum supra. Atqui bases X pyramidum XN , semper æquales ponuntur superficiebus polyedrorum; & Z basis cono ZO per hyp. æqualis est superfici sphaeræ: ergo etiam bases X desinent in basim Z ; ac proinde, cum pyramides XN sint ad conum ex hyp. æque altum, ut (d) basis X ad basim Z , etiam pyramides in conum desinent. ^{(d) Per cor. p. 11. l. 12.}

Demonstratio jam allata hujus propositionis & sequentis, penitus diversa est ab ea, qua usus est Archimedes; quæ quidem valde subtilis & ingeniosa est, sed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifesta, & propositiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipsum vero theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis sphaera quadrupla est cono basim habentis æqualem maximo circulo sphaeræ, altitudinem vero radium.

[Coroll. Hinc hemisphaerium duplum est cono basim habentis æqualem maximo sphaera circulo, altitudinem vero ejusdem sphaera radio æqualem.]

Tacquetus hoc corollarium in prop. 30. exhibet, sed in ejus demonstratione assumit id quod ipsa propositione vix clarius esse videtur, nempe, hemisphaerium æquale esse cono, habenti pro altitudine radium, & pro basi circulum superfici ei hemisphaerii æqualem. Quod quidem ex hac prop. 28. facile deducitur: verum tamen & ipsa prop. 30. ex eadem hac pr. 28. pari facilitate deduci poterat. Aut igitur oportet prop. 30. huc transferri, & in corollarium prædictum mutari, aut saltem, si propositio memorata locum suum teneat, paulo aliter demonstrari debet.]

Scholium.

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate, figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimensio. Nam si diametri sexta pars, sive tertia semidiametri, multiplicetur per sphaeræ superficiem jam notam per scholium prop. 24. proveniet sphaeræ soliditas.

Inventa sit sphaeræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23,760000. & semidiameter esto milliarium horariorum 1375. cujus tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplica 458. omiſſa fractione, per 23,760000. provenient 10882,080000. cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ. [De hisce vero numeris, vide notata ad schol. p. 6. hujus.]

(a) Per hanc
28.
(b) Per sch.
p. 6. hujus.

Cum enim sphaera sit æqualis (a) cono, cujus altitudo est radius sphaeræ, basis vero superficies sphaeræ; conî autem soliditas (b) producat ex parte tertia altitudinis, (hoc est, radii sphaeræ) ducta in basim, (hoc est, in sphaeræ superficiem;) etiam sphaeræ soliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in superficiem.

[Datis autem diametro & circumferentia, habebitur sphaeræ soliditas, si pars sexta circumferentia ducatur in diametri quadratum: vel aliter, si diviso diametri quadrato per 6, quotiens per circumferentiam multiplicetur. Idem enim his modis orietur factum, ac si diametri sexta pars in sphaeræ superficiem duceretur.]

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 26.

OMnis sector sphaeræ, æqualis est cono, cujus altitudo est radius sphaeræ, basis vero sectoris sphaerica superficies.

Esto primum sector (AECG) hemisphaerio minor. Intelligatur sectori circumscriptum esse polyedrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum instituatur ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæsitum. Id solum oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem polyedri ex planis sphaericam superficiem ECG undequaque tangentibus compositam, esse majorem superficie ECG. Quod ita fiet. Cogitetur superficiei ECG apponi alia æqualis & similis, planis tangentibus eodem

eodem prorsus modo cincta quo prior. Erit jam tota (a) (a) *Patet eni*
superficies ex planis composita, major tota sphærica. Ergo *ax. 3: hujus*
etiam dimidia ex planis composita, dimidia sphærica ECG
major erit.

Esto deinde sector (AEBG) major hemisphærio. Uter-
que sector simul sumptus, æqualis (b) est cono cujus altitudo (b) *Per præc*
est radius sphære, basis autem tota superficies; hoc est,
(c) duobus conis, quorum altitudo eadem, bases vero pares (c) *Patet ex*
superficie sphæricæ segmentis ECG, EBG. Atqui secto- *11. l. 12. &*
rum unus AECG hemisphærio minor, per 1. partem æqua- *24. l. 5.*
tur cono cujus altitudo est radius, basis vero superficies
ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus al-
titudo est radius, basis vero superficies reliqua EBG. Quod
erat demonstrandum.

Corollarium.

CUM superficies ECG sit æqualis (d) circulo radii CG, (d) *Per 23*
& superficies EBG æqualis circulo radii BG; erunt *hujus*.
sectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo
est radius sphære, bases vero circuli radiorum CG & BG.

Scholium.

EX his habetur dimensio & sectorum, & segmentorum *Fig. 26.*
sphære; sectorum quidem, si multiplicetur (e) tertia (e) *Patet ex*
pars radii per sphæricam sectorum superficiem, jam notam *schol. p. 6.*
ex scholio prop. 27. [vel ex cor. p. 25.] sive per circu- *hujus.*
lum radii CG, vel BG: segmentorum vero, si mensuretur
conus EAG, & a sectore, si minor est hemisphærio, aufe-
ratur; si major, eidem adjiciatur.

Segmentum (MQRN) quod inter duos circulos sive *Fig. 21.*
parallelos sive non parallelos interjicitur mensurabis, si
segmenta QBR & MBN jam nota auferantur ab invicem.

PROPOSITIO XXX.

HEmisphærium (EOBD) conici (EBD) ean- *Fig. 27.*
dem secum basim & altitudinem habentis,
duplum est.

Conus cujus basis est superficies hemisphærica EOBD,
altitudo autem radius AB, est ad conum EBD, (f) ut basis (f) *Per 11.*
ad basim, *l. 12.*

X

ad basim, hoc est, ut superficies hemisphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cum superficies hemisphærica EOBD dupla (a) sit maximi circuli, etiam conus pro basi habens superficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus est coni EBD. Atqui hemisphærium æquatur (b) cono habenti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium coni EBD duplum est. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 14. hujus. [Aliter. Cum conique aque alii inter se (c) sint ut bases, erit conus cujus altitudo est radius sphaera, & basis aequalis est superficiei sphaera, ad conum ejusdem altitudinis, super circulo sphaera maximo pro basi, ut (d) 4 ad 1. Et cum conus prior sit sphaera (e) aequalis; erit ergo sphaera ad conum posteriorem, ut 4 ad 1; ac proinde est hemisphærium ad conum posteriorem, ut 2 ad 1. Sed conus posterior eandem habet altitudinem & basim cum dicto hemisphærio.]

Hemisphærium igitur duplum est coni eandem secum basim & altitudinem habentis.

Corol. Conus EBD, hemisphærium EOBD ac cylindrus EK, eandem basim & altitudinem habentia, sunt inter se ut 1. 2. 3. Nam per hanc prop. conus est ad hemisphærium ut 1. ad 2. Et per 10. l. 12. est idem conus ad cylindrum ut 1. ad 3.]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 18.

Sphaera sit divisa in duo segmenta ILBG, ISKG, plano IQGT, per centrum A non transeunte: diameter autem plano secanti recta, sit BOK.

Ut altitudo OB segmenti ILBG est ad radium sphaera AB, ita OK altitudo segmenti ISKG fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo segmenti ISKG est ad radium AK seu AB, ita altitudo OB segmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines sunt ON, OD, basis vero communis IQGT, segmentis sphaericis sunt aequales.

2. Segmentorum eadem est proportio, quæ rectarum DO, NO.

3. Segmentum ISKG est ad maximum sibi inscriptum

scriptum conum IKG, ut NO ad KO; & segmen-
tum ILBG est ad sibi inscriptum conum maximum
IBG, ut DO ad BO.

Pars I. Sphæra & conī secantur plano per diametrum BK.
Producentur in sphæra circulus maximus BLKG, in conis
vero trianguła BIG, IKG. Et quia BOK diameter (a) recta (a) *Per hyp.*
est circulo QT, erit angulus IOB (b) rectus. Angulus quo- (b) *Per def.*
que BIK (c) in semicirculo rectus est. Quoniam igitur in 3. l. 11.
triangulo BIK ab angulo recto ducta est IO perpendicularis (c) *Per 31.*
in basim BK, erit BI ad IO, ut (d) BK ad KI. Ergo ratio l. 3.
duplicata BI ad IO æqualis est rationi duplicatæ BK ad KI; (d) *Per cor.*
hoc est, (quia BK, KI KO (e) sunt tres proportionales), 3. p. 8. l. 6.
(e) *Per cor.*
æqualis rationi BK ad KO. 2. p. 8. l. 6.

Deinde quia est ut OK ad radium AB, ita (f) OB ad BD, (f) *Per hyp.*
erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad OK: & per-
mut. DB ad BA, ut BO ad OK: & compon. DA ad BA,
ut BK ad OK. Quoniam igitur jam ostendi rationem BK
ad OK duplicatam esse rationis BI ad IO, ac proinde æqua-
lem (g) rationi circulorum radii BI, IO descriptorum; erit (g) *Per cor.*
quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. 2. p. 2. l. 12.
Igitur conus sub altitudine DA, & basi circulo radii
IO, hoc est circulo QT, æqualis est (h) cono sub altitudine (h) *Per 15.*
BA, & basi circulo radii BI, hoc est (i) sectori sphærico AIBG. l. 12.
Quare si tam sectori AIBG, quam cono sub DA & circulo
QT, addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videli- p. 29. hujus.
cet segmentum sphæricum ILBG æquabitur duobus conis, (k) *Patet ex*
quorum unus est, qui fit sub basi QT & altitudine DA, 14. l. 12. &
alter IAG, sub eadem basi QT, & altitudine OA. Sed hi 24. l. 5.
duo conī (k) faciunt conum IDG. Ergo segmentum (l) *Per cor.*
ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonstrandum. (m) *Per 34.*

Eodem discursu erit segmentum ISKG æquale cono ING, l. 5. & sch.
eo solum mutato, ut conus IAG qui prius addebatur, jam p. 20. l. 6.
auferatur. (n) *Per cor.*

[Quia enim est (l) KI:IO::KB:BI; (m) erit KIq:IOq:: 2. p. 8. l. 6.
KBq:BIq (n)::KB:BO. Sed per hypoth. est NK:(AB=)KA:: l. 5.
KO:OB. Et comp. NA:AK::KB:BO::(o)KIq:IOq::(p)circ. (o) *Prius.*
rad. KI:circ. rad. IO=circ. QT. Ergo conus sub altitud. (p) *Per cor.*
NA & basi QT, (q) æquatur cono sub altit. AK & circ. rad. 2. p. 2. l. 12.
KI, hoc est, (r) sectori sphæ. AIKG. Sed conus sub alt. NA (q) *Per 15.*
& basi QT, (s) æqualis est duobus conis simul sumptis, uni l. 12.
quidem sub altit. NO & basi QT, & alteri sub alt. OA & (r) *Per cor.*
eadem basi QT, hoc est, conis ING, IAG; Et sector sph. AIKG (s) *Patet ex*
æqualis est segm. sphæ. ISKG & cono IAG simul sumptis. Au- 14. l. 12. &
feratur 24. l. 5.

feratur utrinque conus IAG, & relinquatur con. ING =
segm. sphar. ISKG. Q. E. D.]

Pars 2. Patet ex prima. Nam coni IDG & ING sunt
(a) Per 14. inter se (a) ut DO & NO. Ergo & segmenta ILBG,
l. 12. ISKG conis illis æqualia, sunt inter se, ut rectæ DO, NO.

Pars 3. Patet similiter ex prima. Nam conus IDG est
(b) Per eand. ad conum IBG, (b) ut DO ad BO. Ergo & segmentum
ILBG, cono IDG æquale, est ad conum IBG, ut DO
ad BO. [Eodem modo ostendetur esse segmentum ISKG ad co-
num IKG, ut NO ad KO.]

Scholium.

EX prima parte hujus theorematis, habetur alia, eaque
facillima segmentorum sphaericorum mensio; si ni-
(c) Vide sch. mirum coni IDG, ING mensurentur; quod fiet, si (c) tertiæ
post 6. hujus. partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 27.

Cylindrus rectus (GK,) sphaera, cui circumscribitur,
& soliditate & superficie tota sesquialter est.

Communis sphaeræ ac cylindri axis esto BQ, conus vero
maximus hemisphaerio EOBD inscriptus sit EBD. Quia
(d) Per 10. cylindrus EK, (semifissis totius GK) triplus (d) est coni EBD;
l. 12. hemisphaerium vero (e) ejusdem coni duplum, patet cylin-
(e) Per 30. drum EK esse ad hemisphaerium, ut 3. ad 2. Ergo etiam
hujus. totus cylindrus GK est ad totam sphaeram QEBD, ut 3. ad
2. Quod erat primum.

Deinde quia cylindri latus KN est æquale basis diametro
(f) Per cor. GN, erit ejus superficies absque basibus (f) quadrupla baseos
p. 12. hujus. MI, ac proinde cum basibus, hoc est tota cylindri superfi-
cies erit sextupla baseos MI, quæ par est maximo sphaeræ
circulo. Atqui sphaeræ superficies quadrupla est maximi cir-
culi. Ergo tota cylindri GK superficies est ad sphaeræ superfi-
ciem, ut 6. ad 4. live ut 3. ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus sphaeræ sibi inscriptæ & soliditate & tota
superficie sesquialter est. Quod erat demonstrandum.

[Cor 1. Cylindrus rectus sphaera circumscriptus, ipsa sphaera,
& conus ejusdem cum cylindro basis & altitudinis, sunt inter
se ut 3. 2. 1. Nam per hanc prop. cylindrus est ad sphaeram
ut 3. ad 2; & per 10. l. 12. est cylindrus ad conum ut 3. ad
1. Ergo, &c. Atque in eadem ratione sunt, superficies cylindri
hemisphaerio conscripti cum basi hemisphaerium tangente, superfi-
cies hemisphaerii, & basis utrique communis. Cum enim tam
(g) Per 26. hujus cum cylindrica superficies quam hemisphaerica, sit (g) dupla baseos;
cor. eris

erit cylindrica cum basi ad basim alteram, ut 3. ad 1. Unde liquet propositum.

Cor. 2. Hinc cylindrus GK dempta sphaera, (sive solidum cylindricum sphero-cavum, superficie tota cylindri externe, & superficie sphaerica concava interne terminatum,) aequatur cono inscripto GBN. Cum enim cylindrus sit ad inscriptam sphaeram ut 3 ad 2, erit ad solidum cylindricum sphero-cavum ut 3 ad 1, hoc (a) est, ut idem cylindrus ad conum GBN; ac proinde solidum illud cono GBN aequale erit. (a) Per 10. l. 12.

Cor. 3. Solidum cylindricum hemisphero-cavum, (hoc est, cylindrus EK dempto hemisphario inscripto EOB) aequale est cono inscripto EBD. Etenim tam solidum, quam conus, pars est (b) tertia cylindri EK. (b) Patet eodem modo quo cor. 2. Fig. 21.

Cor. 4. Si conus HAV, cylindro NH inscriptus, verticem habeat in centro A hemispharii MOBN, cylindro etiam inscripti, & basem HV hemispharii basi parallelam, & hemisphaerium in ipsius vertice B tangentem; e cylindro autem eximatur hemisphaerium; relinquetur solidum cylindricum hemisphero-cavum, cono HAV super eadem basi HV aequale. Patet ex cor. 3. cum lykado

Cor. 5. Si ejusmodi conus & solidum secantur plano quovis LX basi HV parallelo; fient in cono circulus æ, in solido planum annulare QLXR, sibi invicem ubique equalia. Nam ducto sphaera radio AR, erit $ARq(c) = ADq + DRq$. Sed propter AB, BV aequales, (d) erunt AD, Dæ aequales: (e) l. 1. æquantur etiam AR, AN, DX inter se. Ergo $DXq = Dæq + DRq$; & circulus radio DX (f) æquatur circulis qui radiis DR, Dæ respective describuntur, simul sumptis. Aufer utrinque circulum radio DR descriptum, & restabit planum annulare QLXR aequale circulo habenti radium Dæ. (c) Per 47. l. 1. (d) Per cor. 1. p. 4. l. 6. (e) Per def. 5. l. 12. & p. 34. l. 1. (f) Per cor. 2. p. 2. l. 12. & p. 24. l. 5.

Cor. 6. Segmenta quavis coni HAV & solidi cylindrici hemisphero-cavi, planis basi parallelis intercepta, sunt equalia. Nam conus solido equalis est; & sectio circularis æ cono, plano annulari QLXR solidi semper æquatur. Si igitur planum LX feratur sursum vel deorsum, motu basi parallelo, generabit ubique coni & solidi cylindrici equalia segmenta.

Cor. 7. Ex mensura (g) igitur coni HAV, habetur dimensio solidi hemisphero-cavi; & ex mensura (h) coni truncati OæK, habetur dimensio segmenti annularis QLIORXTK iisdem planis IT, LX intercepti. Atque hinc etiam alia methodus exoritur segmenta quavis sphaerica dimetiendi. (g) Per sch. p. 6. hujus. (h) Per eand.

Sic si quaratur mensura segmenti QOKR parallelis planis QR, OK intercepti; e cylindro LT deducatur conus truncatus OæK: & si quaratur segmentum MQRN a parallelis planis MN, QR terminatum; e cylindro MX subducatur conus a At.]

Quanti hoc theorema fecerit Archimedes, argumento est, quod tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortasse, inter alia tam multa & præclara inventa sua, hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & superficierum corpora ipsa continentium eadem esset atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque superficies demonstravimus lib. 4. Cylindricorum & annulariorum, prop. 13, 14, 15. sed & ipsa in sphæra aliud mihi hujus rei exemplum illustre sese obtulit. Deprehendi siquidem, quemadmodum sphæra ad cylindrum rectum se ambientem, (qui necessario æquilaterus erit,) est tam soliditate quam superficie, ut 2. ad 3. ita sphæram ad æquilaterum conum se ambientem & soliditate similiter & superficie eam habere proportionem, quam 4. ad 9. Ex quo deinde illud consequitur, sesquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & sphæra repertam, in tribus solidis, sphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriusque demonstrationem, pluraque alia theoremata nostra, quibus sphære natura mirabilis amplius innotescet, tredecim sequentibus propositionibus comprehensa, subjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 29.

Superficies sphære dupla est superficiei cylindri quadrati sphære inscripti.

Quadratum maximo sphære circulo inscriptum, a quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, esto AKLD, ducaturque AL, diameter quadrato & sphære communis.

- (a) Per 47. Quoniam quadratum AL par (a) est quadratis æqualibus
l. 1. AK, KL, erit duplum unius AK. Ergo etiam circulus di-
(b) Patet ex ametri AL, duplus (b) est circuli, cujus diameter AK, cir-
cor. 5. p. 2. culi nempe CN. Atqui superficies sphære quadrupla (c) est
l. 12. circuli, cujus diameter AL: is enim est maximus sphære
(c) Per 24. circulus, cum AL sit sphære diameter. Ergo sphære su-
hujus. perficies octupla est circuli CN. Sed quia LK, KA, (d)
(d) Per hyp. æquales sunt, cylindrica superficies ACL quadrupla (e) est
(e) Per cor. p. 12. hujus. circuli CN. Ergo cum sphære superficies ejusdem circuli
octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat
demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 29.

Sphære superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 4. ad 3.

Ponant.

Ponantur eadem quæ demonst. præced. Quoniam cylindri latus LK & basis diameter AK (a) æquales sunt, erit (a) *Per hyp.* superficies cylindrica CL (b) quadrupla basis CN, ac proinde (b) *Per cor.* tota cylindri superficies ad utramque basim CN & SL est p. 12. hujus. ut 6. ad 2. Atqui sphaeræ superficies est ad utramque simul basim CN, SL ut 8. ad 2. cum in præced. ostensa sit esse ad unam basim, ut 8. ad 1. Ergo sphaeræ superficies est ad totam cylindri CL superficiem ut 8. ad 6. five ut 4. ad 3. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. **T**ota cylindri recti sphaeræ circumscripti superficies est ad totam superficiem cylindri æquilateri inscripti, ut 2. ad 1. Nam circumscripta est ad sphaericam ut 6. ad 4. per 32. hujus. Sphaerica autem est ad inscriptam, ut 4. ad 3. per hanc. Ergo ex æquo circumscripta est ad inscriptam, ut 6. ad 3. five ut 2. ad 1.

[Pari modo, sphaera cylindro quadrato conscripta superficies dupla est superficiei sphaeræ eidem inscripta; sicut & hæc dupla est circuli maximi sphaeræ conscripta. Sunt enim (c) (c) *Per hanc,* sphaerica circumscripta, tota cylindrica, & sphaerica inscripta, & 32. cum ad maximum sphaeræ circumscripta circulum; ut 4. 3. & 2. ad 1. 24. hujus.

2. Superficies tota cylindri recti sphaeræ circumscripti, superficies sphaeræ, & superficies tota cylindri æquilateri sphaeræ inscripti, sunt inter se in proportionem musica, hoc est, ut (d) 6. 4. 3. (d) *Per 32.*

Tres autem quantitates sunt in proportionem musica, si fuerit & hanc. prima ad tertiam, ut est differentia primæ ac secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Sic quia 6. 3 :: 6 - 4. 4 - 3 (:: 2. 1;) erunt 6, 4, 3 in proportionem musica.

Scholium. Cylindrus sphaeræ circumscriptus est ad cylindrum Fig. 29. similem (nempe æquilaterum) eidem sphaeræ inscriptum, ut in quadrato diameter ad lateris semissem; sive (quod perinde est) ut circuli diameter ad sinum graduum 45. Atque in eadem ratione est sphaera cylindro æquilatero circumscripta ad sphaeram eidem inscriptam.

(e) *Per 8.*

1. Nam propter triangulum rectangulum æquicruræ AKL, l. 6. demissis perpendicularibus KQ, QR, triangula AQK, ARQ (f) *Per cor.* erunt (c) etiam rectangula & æquicrura. Unde (f) AL, AK, 2. p. 8. l. 6. AQ, AR ::, & (g) $AR = \frac{1}{2} AK$. Sed AL est diameter schol. p. 26. baseos cylindri circumscripti, & AK diameter baseos inscripti l. 1. Ergo, propter cylindrorum similitudinem, erit (h) circumscriptus (h) *Per 12.* ad inscriptum in triplicata ratione AL ad AK, hoc (i) est, (i) *Per def.* ut AL ad $(AR =) \frac{1}{2} AK$. Sed AL est quadrati DK & circuli 10. l. 5.

AGBK diameter, & AK est ejusdem quadrati eidem circulo
 (a) Per cor. inscripti latus, sive in circulo GK chorda gr. 90; ac proinde (a)
 l. p. 3. l. 3. $\frac{1}{2}$ AK est sinus gr. 45. Ergo cylindrus circumscriptus est ad
 inscriptum, ut in quadrato diameter ad lateris semissem, sive
 ut circuli diameter ad sinum graduum 45.

2. Et in eadem ratione est sphaera cylindro aequilatero cir-
 cumscripta ad sphaeram eidem cylindro inscriptam. Nam sphaera
 GK cylindro aequilatero ADLK circumscripta diameter est
 AL, & sphaera inscripta diameter aequalis est diametro ba-
 seos cylindri, nempe ipsi AK. Sphaera igitur circumscripta erit
 (b) Per 18. (b) ad inscriptam, in triplicata ratione AL ad AK, hoc est,
 l. 12. ut AL ad AR sive $\frac{1}{2}$ AK. Q. E. D.

Cor. ad schol. præced. Sphaera est ad cylindrum aequila-
 terum sibi inscriptum, ut in quadrato quadrupla diameter ad
 triplum latus; sive, ut quadrupla circuli diameter ad triplum
 latus quadrati circulo inscripti.

Nam per schol. præced. est sphaera cylindro aequilatero cir-
 cumscripta ad sphaeram eidem inscriptam, ut in quadrato dupla
 diameter ad latus, sive ut quadrupla diameter ad duplum
 latus. Sed sphaera inscripta eidem cylindro est ad cylindrum,

(c) Per 32. (c) ut 2 ad 3, sive ut duplum latus quadrati ad triplum
 hujus. ejusdem quadrati latus. Ergo (d) sphaera circumscripta cylindro

(d) Per 22. aequilatero est ad eundem cylindrum, (hoc est, sphaera est ad
 l. 5. cylindrum aequilaterum sibi inscriptum,) ut in quadrato qua-
 drupla diameter ad triplum latus, sive (quod perinde est) ut
 quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati eidem
 circulo inscripti.]

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 29. vel 28. **C**ujuscunque portionis sphaericæ superficies (ILBG)
 ad superficiem conii maximi inscripti (IBG,) eam rationem habet, quam conii latus (BG) ad basis radium (GO.)

(e) Per 25. Quoniam portionis ILBG superficies (e) æqualis est cir-
 hujus. culo radii BG, erit proportio ejus ad circumulum QT, basim

(f) Per cor. nempe suam & conii, duplicata (f) rationis BG ad GO;
 2. p. 2. l. 12. hoc est, (g) rationis superficiei conicæ IBG ad basim ean-

(g) Per 14. dem QT. Ergo liquet (h) superficiem ILBG esse ad super-
 hujus. ficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG est ad basim

(h) Per def. QT. Quare cum conica IBG sit ad basim QT, (i) ut BG
 10. l. 5. ad GO, etiam portionis superficies erit ad conicam IBG

(i) Per 14. sibi inscriptam ut BG ad GO. Quod erat demonstrandum.
 hujus.

[Cor.]

[Cor. Ex hujus prop. demonstratione liquet, superficiem coni maximi segmento sphaerae inscripti, esse mediam proportionalem inter superficiem segmenti, & basim utrique communem.]

PROPOSITIO XXXVI.

Hemisphaerii superficies (EOBD) ad coni maximi sive recti inscripti superficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem vero coni similis circumscripti, ut latus in quadrato ad diametrum. Fig. 27.

1. Partis demonstratio ex praecedenti est manifesta. Est enim portionis cujuscunque, ac proinde & hemisphaerii superficies EOBD ad conicam inscriptam, ut BD ad DA. Est autem BADK quadratum, cujus diameter est BD, latus DA.

2. Pars. Semissis quadrati circulo (cujus centrum A) circumscripti, esto EBC: qua circa axem AB circumacta, gignatur conus hemisphaerio conscriptus. Quoniam quadratum EC duplum (a) est quadrati EB, seu GI, etiam circulus diametri EC duplus (b) est circuli cujus diameter GI, hoc est circuli HGDI. Atqui (c) superficies hemisphaerii cono EBC inclusi, ejusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri EC eidem superficiei hemisphaericae aequalis est. Quare cum superficies conica EBC sit ad (d) circumulum diametri EC, basim nempe suam, ut latus BE ad basis radium EA; erit quoque ad superficiem hemisphaericam sibi inscriptam, ut BE ad EA, hoc est, ut diameter in quadrato ad suum latus; [ac proinde, superficies hemisphaerica erit ad circumscriptam conicam, ut latus in quadrato ad diametrum.] Quod erat demonstrandum.

[Corol. Si hemisphaerium cono rectangulo EBC circumscribitur & inscribatur; erit superficies coni media proportionalis inter superficiem hemisphaerii circumscripti, & superficiem inscripti. Est enim, tam superficies circumscripta ad conicam, quam conica ad inscriptam, ut in quadrato diameter ad latus.] Fig. 10. l. 4.

PROPOSITIO XXXVII.

Sphaera ad quadratum rhombum conicum sibi circumscriptum, & soliditate & superficiei eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum. Fig. eadem cum Fig. 13. l. 5.

Maximo

Maximo sphaerae circulo HGDI circumscriptum esto quadratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem acto, rhombus conicus gignatur sphaeram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inspice Fig. 10. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R, (inspice Fig. 13. l. 5.) quae proportio per 4. terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur

- (a) *Per def.* tur ratio S ad O triplicata (a) rationis S ad R, hoc est, EB
10. l. 5. ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q,
(b) *Per sch.* five R ad S, hoc est, EC ad EB; ac proinde (b) O est ad
p. 20. l. 6. R, ut quadratum EC ad quadratum EB: unde (c) O est
(c) *Ex sch.* dupla ipsius R. His ita constitutis, intelligatur rhombo co-
p. 6. & 7. l. nico sphaera circumscribi EBCF. Erit igitur sphaera HGDI
4. ad sphaeram EBCF in (d) ratione triplicata diametri GI (five
(d) *Per* 18. EB) ad diametrum EC; hoc est, (quod jam ostendi,) erit
l. 12. ut S ad O. Sphaera autem EBCF est ad rhombum coni-
(e) *Per* 30. cum sibi inscriptum (e) ut 2. ad 1. hoc est, (quod ostendi
hujus. supra,) ut O ad R. Igitur ex aequo, sphaera HGDI est
ad eundem rhombum, qui ei est circumscriptus, ut S est
ad R, hoc est, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC.
Quod erat primum.

[Idem etiam ex unica fig. 10. lib. 4. inspectione demon-
strabitur. Nam propter triangula rectangula EGA, EAB,

- (f) *Per cor.* EBC, communem angulum E habentia, erunt (f) EG, EA,
post sch. p. EB, EC $\div$, & ratio EG ad EC triplicata (g) erit rationis
13. l. 6. EB ad EC. Sed sphaera rhombo conico inscripta, est ad sphaeram
(g) *Per def.* eidem circumscriptam, in triplicata (h) ratione diametrorum
10. l. 5. EB, EC, hoc est, ut EG ad EC. Et sphaera circumscripta,
(h) *Per* 18. est (i) ad rhombum cui circumscribitur, ut 2 ad 1, five ut
l. 12. EC ad EA. Ergo ex aequo, (k) sphaera inscripta est ad rhombum
(i) *Per* 30. cui inscribitur, seu, (quod idem est,) sphaera est ad rhombum
hujus. sibi circumscriptum, ut EG ad EA, hoc est, ut in quadrato
(k) *Per* 22. l. 5. HG, latus ad diametrum.]

Deinde ex secunda parte praecedentis patet hemisphaerii superficiem esse ad superficiem coni [circumscripti] EBC, ac proinde & totius sphaerae [HGDI] superficiem esse ad superficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo sphaera tam soliditate quam superficie est ad rhombum quadratum [conicum sibi circumscriptum] EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonstrandum.

[Cor. 1. Superficies sphaera rhombo conico quadrato circumscripta, superficies rhombi, & superficies sphaera rhombo inscripta, eandem rationem continuant, eam nempe quam in quadrato habet diameter ad latus. Patet ex praecedenti & hac.

Cor. 2.

Cor. 2. Superficies sphaera rhombo conico quadrato circumscripta, dupla est superficiei sphaera eidem rhombo inscripta. Fig. 10. l. 4.
Ac similiter, superficies rhombi conici quadrati sphaera circumscripti, dupla est superficiei rhombi similis eidem sphaera inscripti. Cum enim per cor. 1. sint superficies sphaera rhombo circumscripta, superficies rhombi, & sphaerica inscripta, ut EC, EB, EA; & cum similiter sint superficies rhombi sphaera circumscripti, superficies sphaera, & ea rhombi inscripti, ut EC, EB, EA; Liqueat in utroque casu, superficiem corpori circumscriptam esse ad eandem inscriptam, ut EC ad EA, sive ut 2. ad 1.

Cor. 3. Rhombus conicus quadratus, est duorum mediorum proportionalium prior, inter sphaeram inscriptam & circumscriptam, ut in demonstratione prima partis hujus prop. ostensum est. Nam inscripta, rhombus, & circumscripta, sunt inter se, ut S, R, & O, in fig. 13. l. 5. vel ut EG, EA, & EC, in fig. 10. l. 4.

Cor. 4. Patet quoque ex eadem demonstratione, (vel etiam ex p. 30. hujus,) sphaeram rhombi conici quadrati sibi inscripti duplam esse. Fig. 10. l. 4.

Cor. 5. Sphaera EBCF rhombo conico quadrato circumscripta, est ad sphaeram HGDI eidem rhombo inscriptam, ut in quadrato diameter EC ad lateris EB semissem EG, uti ex demonstratione memorata liquet. Atque in eadem ratione est rhombus conicus quadratus sphaera circumscriptus ad similem rhombum conicum eidem sphaera inscriptum. Nam per hanc 37. est rhombus quadratus conicus sphaera circumscriptus ad ipsam sphaeram, ut EC ad EB: & per cor. 4. est sphaera ad ejusmodi rhombum sibi inscriptum, ut 2. ad 1, sive ut EB ad EG. Ergo erit ex aquo (a) rhombus circumscriptus ad inscriptum, ut EC ad EG. (a) Per 22. l. 5.

Cor. 6. Eadem itaque proportio est inter rhombum conicum quadratum sphaera circumscriptum & rhombum similem eidem sphaera inscriptum, ac inter cylindrum aequilaterum eidem cuius alteri sphaera circumscriptum & inscriptum; vel inter sphaeram eidem cylindro aequilatero, seu eidem rhombo conico quadrato circumscriptam & inscriptam. Ea nempe ratio, qua in quadrato est inter diametrum & lateris semissem. Patet ex cor. preced. hujus prop. & ex schol. post p. 34. hujus.]

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 30. **S**uperficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla est superficiei ejusdem coni.

(a) Per 35. Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis BGKD est ad inscriptam conicam, ut (a) BK ad BA. Sed quia conus BKD æquilaterus ponitur, KB est æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam superficies BGKD dupla est inscriptæ conicæ BKD. Quod erat demonstrandum.

[Cor. 1. Eadem ratio dupla continuatur, inter superficiem portionis sphericæ conum æquilaterum capientis, superficiem coni, & basim coni. Patet ex hac, & ex cor. p. 35. hujus.

Cor. 2. Superficies portionis sphericæ conum æquilaterum capientis, est ad superficiem totam ejusdem coni, ut 4. ad 3.

Nam per cor. 1. superficies portionis sphericæ, superficies coni, & basis coni sunt inter se, ut 4. 2. 1. Unde liquet hoc cor.

Cor. 3. Sphæræ superficies est ad totam cylindri æquilateri sibi inscripti superficiem, ut superficies portionis sphericæ conum æquilaterum capientis est ad superficiem totam ejusdem coni. Nempe ut 4. ad 3. Patet ex p. 34. & ex cor. 2. hujus p. 38.

Atque in eadem ratione est superficies tota cylindri recti hemisphærio circumscripti, ad superficiem totam hemisphærii. Cum enim (b) tam cylindrica superficies, quam (c) hemisphærica, sit cor. p. 26. dupla baseos; erit tota cylindrica, baseos quadrupla; & hemisphærica cum basi, ejusdem baseos tripla. Quare tota cylindri superficies erit ad totam hemisphærii, ut 4. ad 3.]

(b) Patet ex
cor. p. 26.
hujus.

(c) Patet ex
24. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 30. **S**phæræ superficies ad totam coni æquilateri sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.

Esto Z sphæræ centrum, & conus æquilaterus sphæræ inscriptus BKD, axis sphæræ ac cono communis KZAO. Per hunc si secetur sphæra ac conus, producet in sphæra circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æqui-

(d) Per def. 3. l. 11. laterum BKD, cujus unum latus BAD erit diameter baseos conicæ QT. Et quia axis coni KA rectus est basi QT, erit

(e) Per cor. 1. p. 17. l. 6. angulus BAK (d) rectus. Igitur quadratum BA æquale est

(f) Per cor. 5. p. 15. l. 4. (e) rectangulo KAO. Jam quia latus æquilateri trianguli abscindit (f) quartam axis partem AO, erit rectangulum KAO,

KAO, hoc est, quadratum BA, triplum quadrati (a) AO. (a) Per 1.
 Quare cum quadratum radii ZO (b) quadruplum sit qua- l. 6.
 drati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, (b) Per cor.
 ut 4. ad 3. Ergo etiam (c) circulus OBKD est ad circu- 3. p. 4. l. 2.
 lum QT ut 4. ad 3. Ergo sunt quatuor circuli OBKD, hoc (c) Per cor.
 est (d) tota sphaerae DG superficies, ad circulum QT, ut 16. 2. p. 2. l. 12.
 ad 3. Atqui (e) superficies conii æquilateri BKD est ad cir- (d) Per 24.
 culum QT, basim nempe suam, ut 2. ad 1. ac proinde conii huius.
 BKD tota superficies, una cum basi scilicet, est ad basim, (e) Per cor.
 nempe circulum QT, ut 3. ad 1. sive ut 9. ad 3. Ergo 1. p. 38.
 cum ostenderim sphaerae superficiem esse ad eundem circu- huius.
 lum ut 16. ad 3. erit sphaerae DG superficies ad totam
 æquilateri conii superficiem, ut 16. ad 9. Quod erat de-
 monstrandum.

[Cor. Ex hujus demonstratione liquet, coni aquilateri sphaerae inscripti basem $\triangle$ esse ad maximum sphaerae circulum DG, ut 3 ad 4.]

Aliter.

Quoniam æquilateri trianguli latus BD, abscondit (f) quar. (f) *Per cor.*
tam axis partem AO, erit quoque sphærica superficies 5. p. 15. l. 4.
BOD (g) quarta pars, ac proinde superficies BGKD tres (g) *Per 27.*
quartæ superficiei totius sphærx. Quare si superficies tota *hujus.*
statuatur esse 16; BGKD superficies erit 12. Atqui super-
ficies BGKD (h) est dupla superficiei conicæ BKD, ac *(h) Per præc.*
proinde ad eam est ut 12. ad 6. Ergo tota sphærx super-
ficies est ad conicam BKD ut 16. ad 6. Deinde quia su-
perficies coni BKD, (utpote æquilateri,) dupla (i) est ba- *(i) Per cor.*
seos QT, liquet superficiem conicam BKD (nimirum abs- *1. p. 38. huj.*
que basi) esse ad totam coni superficiem, ut 2. ad 3. hoc
est, ut 6. ad 9. Igitur ex æquo tota sphærx superficies est
ad totam æquilateri coni inscripti superficiem, ut 16. ad 9.
Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

Sphaera superficies ad aequilateri conii sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam 4. ad 9.

Circulo sphaeræ maximo BPM circumscriptum fit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto, productus fit conus æquilaterus sphaeræ circumscriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumscriptus etiam

- (a) Per sch. etiam sit circulus, NDLOF, quem (a) patet esse concentricum priori; & axis OAB producat in N. Quoniam BN est (b) quarta pars axis ON, patet ON esse duplam KB.
- (b) Per cor. 5. p. 15. l. 4. Quare cum circulorum ratio sit (c) duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF ut 1. ad 4.
- (c) Per 2. l. 12. Atqui ostensum jam est in demonstratione prima præcedenti, circulum NDLOF esse ad circulum QT, basim conici æquilateri sphaeræ FL inscripti, ut 4. ad 3. Ex (d) æquo igitur circulus BPM est ad circulum QT ut 1. ad 3.
- (d) Per cor. 1. p. 14. hujus. Atqui tota conici DOF superficies, circuli QT (e) tripla est. Ergo tota conici superficies circuli BPM noncupla est. Quare cum sphaeræ TP superficies ejusdem circuli BPM (f) quadrupla sit, erit tota conici æquilateri DOF superficies ad superficiem sphaeræ cui circumscripta est, ut 9. ad 4. Quod erat demonstrandum.

[Coroll. 1. Ex hac demonstratione patet, conici æquilateri sphaera conscripti axem BO sesquialterum esse diametri sphaeræ BK, seu ut 3. ad 2.]

2. Ex eadem demonstratione liquet, conici æquilateri sphaera circumscripti DOF basim QT esse etiam sesquialteram basium cylindri eidem sphaera circumscripti. Nam QT est ad BPM, ut 3. ad 1. Ergo QT est ad BPM bis, ut 3. ad 2.

3. Superficies conici æquilateri DOF est superficiei cylindri eidem sphaera circumscripti sesquialtera. Illa enim (g) dupla est QT, hæc (h) quadrupla BPM. Ergo superficies conica erit ad cylindricam, ut bis 3. ad quater 1; hoc est, ut 6. ad 4. seu ut 3. ad 2.
- (g) Per cor. 1. p. 14. hujus. QT, hæc (h) quadrupla BPM. Ergo superficies conica erit ad cylindricam, ut bis 3. ad quater 1; hoc est, ut 6. ad 4. seu ut 3. ad 2.
- (h) Per 26. & 24. hujus.

4. Circulus maximus BPM sphaera cono æquilatero DOF inscripta, superficies ejusdem sphaeræ, superficies tota conici DOF,

- (i) Patet ex & superficies sphaeræ NDLOF cono circumscripta, sunt (i) inter p. 24. hæc 40. se, ut 1. & 9. 16; hoc est, ut numerorum 1. 2. 3. 4. quadrata.
- (i) Per 26. & 39. hujus.

5. Hinc dato sphaeræ inscriptæ radio AB, facili negotio describentur circuli dictis superficieribus æquales. Nam (k) ejusmodi circulorum radii erunt 2 AB, 3 AB, 4 AB. Unde & superficierum illarum mensura statim innotescunt.
- (k) Per cor. 2. p. 2. l. 22.

6. Cum diameter ON sphaera cono æquilatero circumscripta, dupla sit diametri KB sphaeræ inscriptæ; erit sphaera circumscripta inscriptæ octupla; nempe in triplicata (l) ratione diametrorum, seu ut (m) cubus numeri binarii ad cubum unitatis.]
- (l) Per 18. l. 12.

(m) Per sch. p. 33. l. 11.

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri conī sphaeræ circumscripti tota superficies, quadrupla est superficiei totius conī inscripti eidem sphaeræ. Fig. 31.

Æquilateri conī DOF circumscripti tota superficies est ad sphaeræ superficiem, ut (a) 9. ad 4. & sphaeræ superficies (a) *Per prac.* est ad conī inscripti æquilateri SKT superficiem totam, ut (b) 16. ad 9. Ergo ex (c) æqualitate perturbata, circumscripti æquilateri conī tota superficies est ad totam superficiem æquilateri inscripti, ut 16. ad 4. five ut 4. ad 1. Quod erat demonstrandum. (b) Per 39. hujus. (c) Per 23. l. 5.

[Atque eodem modo, sphaera cono æquilatero circumscriptæ superficies, quadrupla est superficiei sphaeræ eidem cono inscriptæ. Patet ex cor. 4. præced.]

PROPOSITIO XLII.

Sphaera ad inscriptum sibi conum æquilaterum (BKC) Fig. 32.
eam rationem habet quam 32. ad 9.

Sphaera & conus BKC secantur plano per axem communem KO, faciente in sphaera circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad OK recto, abscindatur hemisphaerium FGKI, cui inscriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abscindit OP (d) quartam partem axis OK, erit PK ad AK ut 3. ad 2. hoc est ut 9. ad 6. Basis vero QT est ad circulum OFKI, hoc est, ad basim ND, ut 3. ad 4. hoc est, ut 6. ad 8. uti patet ex demonstratis prop. 39. Quare cum ratio conī BKC ad conum FKI componatur (e) ex ratione altitudinis PK ad altitudinem AK (hoc est ex ratione 9. ad 6.) & ex ratione basis QT ad basim ND (hoc est ex ratione 6. ad 8.) erit conus BKC ad conum FKI ut 9. ad 8. Quare cum sphaera CG quadrupla (f) sit conī FKI, erit conus æquilaterus BKC ad sphaeram CG, ut 9. ad 32. Quod erat demonstrandum. (d) Per cor. 5. p. 1. l. 4. (e) Per n. 2. in schol. p. 15. l. 12. (f) Per 30. hujus. (g) Per cor. p. 39. hujus. (h) Per 28. hujus. (i) Per n. 2. in schol. p. 15. l. 12. (k) Per def. 5. l. 6.

[Aliter PK est ad AK ut 3. ad 2. five ut 9. ad 6. Et cum sit (g) QT ad CG ut 3. ad 4. five ut 6. ad 8; erit QT ad 4CG ut 6. ad 32. Ergo conus altitudinis PK & baseos QT, (hoc est, conus BKC) erit ad conum altitudinis AK & baseos 4CG, (hoc (h) est, ad sphaeram CG) in ratione (i) composita ex 9. ad 6. & 6. ad 32. five (k) ut 9. ad 32.]

PRO- 5. l. 6.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 31.

Conus æquilaterus sphaera circumscriptus, coni æquilateri eidem sphaera inscripti octuplus est.

- Coni æquilateri sphaeræ inscripti & circumscripti sint SKT & DOF, & axis communis esto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quam sphaera; eruntque sectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur descriptus esse circulus NDOF, & axis OKB producat in N. Quoniam vero æquilateri trianguli latus DF abscindit axis ON quartam (a) partem NB, patet NO esse duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus ST abscindit axis BK (b) quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, sic BO ad CK. Sed NO dupla est BK. Ergo etiam BO dupla est CK. Igitur ob similitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam (c) DF & ST, diametri videlicet basium conicarum, sunt inter se in proportionem duplam.
- (a) Per cor. 5. p. 15. l. 4.
(b) Per idem coroll.
(c) Per 4. l. 6.
(d) Per def. 4. l. 12.
(e) Per 12. l. 12.
(f) Per cor. p. 5. l. 1.
- Quare cum conii DOF, SKT sint (d) similes, ac proinde eorum proportio (e) triplicata sit proportionis diametrorum DF & ST, quæ est 2. ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8. ad 1. Quod erat demonstrandum.
- [Aliter. Ductis rectis DN, SB; ob angulos DOF, SKT (f) æquales, æquantur eorum dimidii, DON, SKB; & anguli ODN, KSB sunt (g) recti, & proinde (h) triangula DON, SKB similia sunt: unde DO:SK::ON:KB::(i) 2:1. Ergo & DF(=DO):ST(=SK)::2:1. Et cum conii æquilateri DOF, SKT similes sint, erunt (k) ut 8 ad 1. Sunt enim 8, 4, 2, 1 $\div \div \div$.

Corol. Conus æquilaterus sphaera circumscriptus, est ad conum æquilaterum eidem sphaera inscriptum, ut sphaera cono æquilatero circumscripta ad sphaeram eidem cono inscriptam; nempe ut 8. ad 1. Patet ex hac, & cor. 6. p. 40.

- Et universaliter; cum corpora quæcumque similia sphaeris circumscriptibilia & inscriptibilia, diametros vel latera habeant, sphaerarum circumscriptarum diametris proportionalia; sintque corpora similia ad se invicem in triplicata (eorumque superficies in duplicata) ratione diametrorum vel laterum homologorum: quam (l) igitur rationem habet sphaera corpori cuicumque circumscripta ad sphaeram eidem corpori inscriptam, eandem rationem habebis corpus illud sphaera circumscriptum ad corpus simile
- (l) Per 34. & 16. l. 5.

simile eidem sphaera inscriptum; (& quam rationem habet superficies sphaerica circumscripta corpori cuilibet ad superficiem sphaericam eidem inscriptam, eandem habebit corporis illius sphaera circumscripti superficies ad similis corporis eidem sphaera inscripti superficiem.))]

PROPOSITIO XLIV.

Sphaera ad circumscriptum sibi conum æquilaterum ^{Fig. 31.} (DOF) & soliditate & superficie tota, eam proportionem habet, quam 4. ad 9.

Sphaera TP est ad inscriptum (a) sibi conum æquilaterum SKT, ut 32. ad 9. Inscriptus autem SKT conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF ut (b) 1. ad 8. hoc est, ut 9. ad 72. Igitur ex æquo sphaera TP est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF, ut 32. ad 72. hoc est, [utrumque numerum dividendo per 8.] ut 4. ad 9.

[Aliter. Sphaera est ad inscriptum conum æquilaterum (c) ut 32. ad 9. Inscriptus vero est ad circumscriptum (d) ut (1. ad 8, hoc est, ut) 4. ad 32. Ergo ex æquo (e) perturbate, sphaera est ad circumscriptum conum æquilaterum ut 4. ad 9.]

Propositione autem 40. demonstravimus etiam sphaera superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem ut 4. ad 9. Ergo sphaera & soliditate & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum ut 4. ad 9. Quod erat demonstrandum.

Quod igitur in sphaera & cylindro sphaeram ambiente miratus est Archimedes, id ipsum in sphaera & æquilatero cono ambiente sphaeram jam demonstravimus, ut videlicet & soliditatum inter se eadem proportio rationalis, quæ superficierum existat. Quemadmodum enim ille reperit sphaeram ad cylindrum esse tam soliditate quam superficie, ut 2. ad 3. ita nos docuimus sphaeram & soliditate & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, ut 4. ad 9.

Hinc vero illam ipsam proportionem, nempe sesquialteram, quam existere sphaeram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumscripto & soliditate etiam ac superficie continuari nullo negotio jam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Vide Fig.
qua huic
tractatui
præfixa est.

Conus æquilaterus sphaera circumscriptus, & cylindrus rectus sphaera similiter circumscriptus, & ipsa sphaera, eandem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem, quam quoad superficiem totam.

Nam per 32. hujus, cylindrus rectus GK sphaeram ambiens, tam soliditate quam tota superficie est ad sphaeram ut 3. ad 2. sive ut 6. ad 4. Per præcedentem vero circumscriptus sphaeræ conus æquilaterus BAD, tam soliditate, quam superficie est ad sphaeram ut 9. ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate quam superficie, ut 9. ad 6. Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, sphaera sunt inter se ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem sesquialteram. Quod erat demonstrandum.

[P R O P O S I T I O XLVI.

Vide Fig.
eandem.

Inter conum æquilaterum & cylindrum eidem sphaeræ circumscriptos, eadem obtinet ratio sesquialtera, quoad superficies totas, superficies simplices, soliditates, altitudines & bases.

Hæc propositio patet, quoad superficies totas & soliditates, ex præcedenti; quoad superficies simplices, ex coroll. 3. prop. 40. hujus; quoad altitudines & bases, ex coroll. 1. & 2. ejusdem prop. 40.]

Ad maiorem Dei Gloriam.

APPEN-

APPENDIX

Qua demonstratur ex falso posse directe deduci verum.

IN thesibus Mathematicis, quas Lovanii sesqui abhinc anno Illustriss. D. Theodorus D'Imerfelle, Comes de Bouchove & S. Imperii, magna ingenii commendatione & auditorum plausu publice propugnavit, inter cæteras proposui assertionem hujusmodi: *ex falsis posse verum directe elici, novis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc assertionem sibi oppugnandam suscepit vir Clarissimus Daniel Lipstorpheus in appendice, quam operi suo pererudito, quod Specimina Philosophiæ Cartesianæ inscripsit, hac de causa adjunxit. Id vero ea modestia & humanitate præstitit, ut facile appareat, hoc illi unum fuisse propositum, ut veritatem assequeretur. Ne autem videar doctissimi viri judicium parvi facere, hic illi breviter respondebo, & appendicem reponam.

Conclusionem igitur oppugnatam sic demonstro.

Datur assertio quæ directe ex sua contradictoria inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. est hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonstratione affirmativa inferitur ex sua contradictoria: *E non metitur numerum A*. Quod quidem est æque certum, ac demonstrationem illam esse legitimam. Talis in Elementis hisce nostris prop. 4. l. 11. est hæc: * *Recta BQ non est perpendicularis plano CAF*, * Fig. 12. quæ affirmative deducitur ex sua contradictoria: *recta BQ l. 11. est perpendicularis plano CAF*. Talis in propositione nostra 35. l. 5. est hæc: † *A est ad B, ut E ad F*, quæ directe † Fig. 20. inferitur ex sua contradictoria: *A non est ad B, ut E ad l. 5. F*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. de proport. p. 201. apud Theodosium (commentante Clavio) l. 1. sph. p. 12. & nos plures similes possumus exhibere tum Geometricas tum alias.

Ecce tibi cosmographicam unam, quam in iisdem thesibus disputandam proposui. *Maris, omnisque adeo humidi superficies eo ipso concluditur esse spherica, quo id negas.* Ponatur vera esse ejus contradictoria: *Maris superficies spherica non est*. Quoniam igitur maris superficies spherica non est;

omnes superficiei maritimæ partes non distant æqualiter à centro. Ergo una est altior altera, (altiore enim esse non aliud est, quam longius a centro recedere.) Ergo eæ quæ altiores sunt, defluunt versus minus altas seu decliviores; hanc enim esse humidi naturam experientia constat. Ex tali autem defluxu necessario oritur omnium partium superficiei maritimæ, æqualis altitudo, seu distantia a centro. Æqualis vero omnium partium superficiei maritimæ a centro distantia infert sphæricitatem ejus perfectam. Ergo *maris superficies spharica est.*

Habemus igitur hanc: *Maris superficies spharica est*, directe & affirmative deductam ex sua contradictoria, *maris superficies spharica non est.*

Maneat igitur, extra omnem controversiam esse, dari assertiones, quæ directe ex suis contradictoriis inferantur. Atqui assertio, quæ ex sua contradictoria directe inferitur, necessario vera est, (cum sit axioma per se clarissimum, id necessario verum esse, quod suum contradictorium destruit; destruit autem suum contradictorium, quod ex suo contradictorio directe sequitur.) Ergo & assertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta est assertio, falsa est. Ergo ex falso directe & affirmative deductum est verum. Demonstrata igitur est conclusio in thesibus proposita.

Quod vero ejusmodi demonstratio, qua assertio ex sua contradictoria falsa directe inferitur, vere scientiam pariat, sic ut absque ulteriori ulla deductione ad impossibile, de assertionis veritate securi esse debcamus, ex jam dictis manifestum est, cum lumine naturæ notissimum sit, id necessario verum esse, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio sequela legitima & necessaria inferitur. Quod si verum deducatur ex falso quopiam sibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio scientiam pariet, neque enim de veritate assertionis sic deductæ securi esse possumus, cum in eo ratio jam allata deficiat, & proprium falso sciamus esse, ut ex eo falsa deducantur.

His rite perceptis, facile eruditus Lector perspiciet, nihil opus esse, ut singulis Clarissimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis soluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clarissimi Viri, visum est singula breviter attingere.

Primum supponit ex Dialectica quædam de consequentia directa; & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tum sententiam exponit suam nostræ oppositam. Subjungit

jūngit deinde: hanc sententiam meam stabiliō everfione omnium illorum qua in contrarium afferri poffe videntur.

Primum (inquit) quod ex falſis verum concludere videatur, conſtituit hujusmodi ſyllogiſmus: Omnis leo eſt lapis. Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, ut oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) conſtituunt hypotheſes Aſtronomicae, &c. Quae licet fictitia tantum ſint & falſae; tamen juxta eas calculum eclipsibus, & aliis obſervationibus cœleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent. Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directe elici: Progredior (inquit) ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet, &c. contenditque ruruſum hic non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cum illi ego plane aſſentiar, neque ullum inde pro aſſertione mea argumentum petam: non me magis illa tangunt, quam primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. elem. p. 12. Cardano l. 5. de proport. p. 201. & Theodoſio l. 1. ſph. p. 12. adhibiti, quo me cligitum intendiſſe putat, & vere. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis, evidentem jam demonſtravi ſupra, ex falſo elici directe verum; neque aſſertur quidquam a Clariffimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. l. 9. recitatis, ſubjungit ex eodem Clavio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) ut verum fatear, nescio ſane quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint: qui tamen Logicis valde familiaris eſt, & duobus principiis omnium evidentiffimis & natura notiffimis nititur, hiſce nempe; quod idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe; item, quodlibet aut ſit aut non ſit. Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis aliis que etiam mihi, in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum, quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ, directe ex ſua contradictoria, (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis ac neceſſariis deducatur, Quod quidem quotieſcunque evenit, admiratione dignum eſt, Tantum vero abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valde familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariff. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed forma plane diverſa
a Claviana

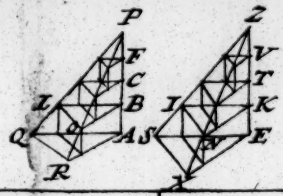
a Claviana illa, quam prius recitaverat, in qua vis argumentationis inter nos controversæ clarissime cernitur. Subjungit denique; *neque ego tam lynceus sum ut exinde videre queam, quo pacto ex falso verum directe sequatur. Illud tamen video, quod si G demonstretur non esse centrum sphaerae, (vult credo dicere, ponatur, cum demonstrari nequeat quod falsum est) necessario sit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G sit centrum sphaerae.* Ad hæc verba repetam compendio demonstrationem superius datam, qua, opinor, fiet ut V. C. tametsi, quod est maxime, lynceus non esset, clare perspiciat elici directe ex falso verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonstratio) si G ponatur non esse centrum, sequi necessitate absoluta & formali G esse centrum; manifestum est, G esse centrum, directe sequi ex sua contradictoria, G non est centrum. Ergo ex vi deductionis constat verum esse quod G sit centrum, cum lumine naturali notum sit id esse necessario verum, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio directe sequitur. Habemus igitur, quod ex hac, (G non est centrum) directe deducta sit hæc vera, (G est centrum.) Atqui hæc (G non est centrum) falsa est, cum jam ostenderit veram esse hanc (G est centrum.) Ergo verum directe deductum est ex falso.

Hæc sunt, Erudite Lector, quæ super hac quæstione breviter hic putavi apponenda. Cæterum nihil dubito quin Clarissimus Lipsorpius eadem animi æquitare responsionem hanc nostram sit accepturus, qua dedit oppugnationem suam, & ego illam accepi.



15



16

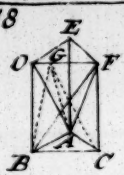


17

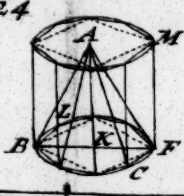


LIBER

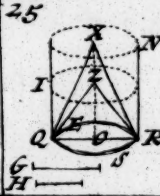
18



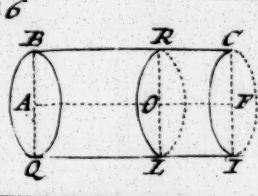
24



25



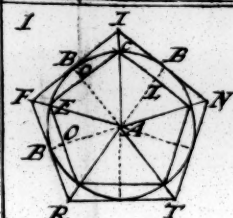
26



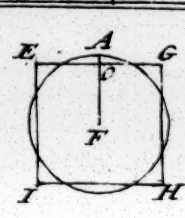
27



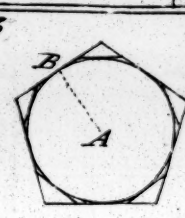
1



2



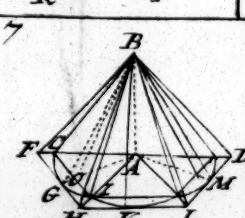
3



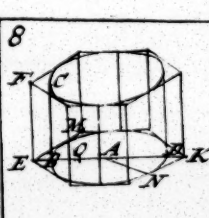
4



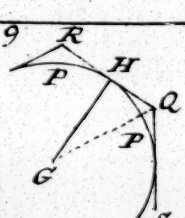
7



8



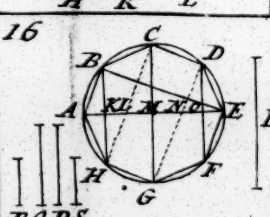
9



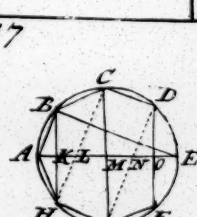
10



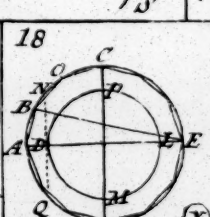
16



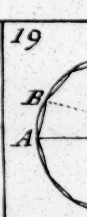
17



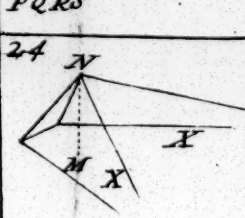
18



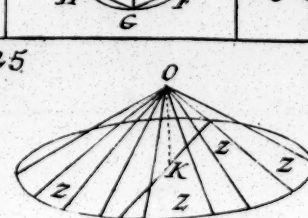
19



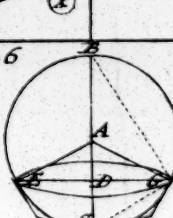
24



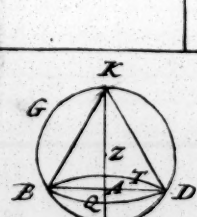
25



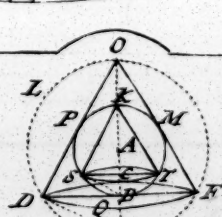
26



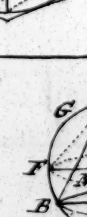
30



31



32



LIBER DUODECIMUS

20

21

22

Tabul

